Topología General

Primer semestre de 2011

Práctica 2: Topologías iniciales y finales

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico, sea $B \subseteq X$ un subespacio y sea $A \subseteq B$. Probar que la topología de A como subespacio de X coincide con la topología de A como subespacio de B.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías en X. Sean $\mathcal{T}_A$ y $\mathcal{T}'_A$ las topologías de subespacio en A respecto de $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ respectivamente.

(a) Demostrar que si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}'_A$.

(b) ¿Es cierto que si $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T}_A \subsetneq \mathcal{T}'_A$?

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subespacio. Sea $B \subseteq A$. Denotamos por $\overline{B}^A$ a la clausura de B en A y por $\overline{B}^X$ a la clausura de B en X. Demostrar que $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$.

Ejercicio 4. Sean X e Y espacios topológicos y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subespacios. Le damos a $X \times Y$ la topología producto. Probar que la topología de $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$ coincide con la topología producto de $A \times B$.

Ejercicio 5. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y sea $Y = \mathbb{R}$ con la topología discreta. Probar que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto en $Y \times X$.

Ejercicio 6. Sea $\mathbb{R}_l$ el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}$ y cuya topología es la generada por la base $\mathcal{B} = \{[a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea $L \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una recta. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

Ejercicio 7. Sea $I = [0, 1]$ con la topología usual y sea I_d el espacio topológico discreto cuyo conjunto subyacente es $[0, 1]$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden lexicográfico en $I \times I$ y con la topología producto de $I_d \times I$.

Ejercicio 8. Sean X e Y espacios topológicos. Le damos a $X \times Y$ la topología producto. Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

Ejercicio 9. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos. Le damos a $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ la topología producto. Sea $\beta \in J$. Probar que la proyección $p_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ es continua y abierta. Hallar un ejemplo en el que las proyecciones no sean cerradas.

Ejercicio 10. Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $j \in J$, sea $A_j \subseteq X_j$. Le damos a $\prod_{j\in J} X_j$ la topología producto.

(a) Demostrar que $\overline{\prod_{j\in J} A_j} = \prod_{j\in J} \overline{A_j}$.

(b) Demostrar que si A_j es cerrado en X_j para todo $j \in J$, entonces $\prod_{j\in J} A_j$ es cerrado en $\prod_{j\in J} X_j$.

(c) Demostrar que los items (a) y (b) también son ciertos si le damos a $\prod_{j\in J} X_j$ la topología caja.

Ejercicio 11. Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{j\in J} X_j$ con la topología producto. Para cada $i \in J$, sea $p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ la proyección. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X y sea $x \in X$. Probar que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \to p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

Ejercicio 12. Comparar las topologías caja, producto y uniforme en $\mathbb{R}^\omega$. Rehacer el ejercicio 19 de la práctica 1 tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología producto y la topología caja. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.

Ejercicio 13. (**L**) Sea X un espacio topológico y sean $\{X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_j : X \to X_j \ / \ j \in J\}$ una familia inicial de funciones. Le damos a $\prod_{j\in J} X_j$ la topología producto.
Sea $f : X \to \prod_{j\in J} X_j$ definida por $f(x) = (f_j(x))_{j\in J}$ y sea Z la imagen de f. Le damos a Z la topología de subespacio. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

Ejercicio 14. Sea $\{X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y sea X un conjunto. Sea $\{f_j : X \to X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de funciones. Definimos las siguientes topologías en X.

- $\mathcal{T}_1$ es la topología menos fina que hace continuas a todas las funciones $f_j : X \to X_j$, $j \in J$.
- $\mathcal{T}_2$ es la topología generada por la sub-base $\mathcal{B} = \{(f_j)^{-1}(U_j) \ / \ j \in J \text{ y } U_j \subseteq X_j \text{ es abierto}\}$.

- $\mathcal{T}_3$ es la única topología en X que cumple la siguiente propiedad: 'Para todo espacio topológico Z y para toda función $f : Z \to X$, f es continua si y sólo si $f_j \circ f$ es continua para todo $j \in J$'.

(a) Demostrar que la topología $\mathcal{T}_3$ está bien definida (es decir, que existe una única topología que cumple la propiedad anterior).

(b) Probar que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$.

Ejercicio 15. Sean X e Y espacios topológicos y sea $i : X \to Y$ una función subespacio (es decir, i es inyectiva e inicial). Le damos a $i(X) \subseteq Y$ la topología de subespacio. Demostrar que $i : X \to i(X)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 16. Sean X e Y espacios topológicos y sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $i : X \to X \times Y$ y $j : Y \to X \times Y$ definidas por $i(x) = (x, y_0)$ y $j(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que la topología inducida por d es la topología menos fina en X tal que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.
Sugerencia: Si d es continua también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$.

Ejercicio 18. Sea X un espacio topológico y sea S el espacio de Sierpinski.

(a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $\chi_A : X \to S$ es continua.

(b) Probar que la familia $\{\chi_U \ / \ U$ es abierto en $X\}$ es una familia inicial para la topología de X.

Ejercicio 19. Sea $\{X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y sea X un conjunto. Sea $\{f_j : X_j \to X \ / \ j \in J\}$ una familia de funciones. Definimos las siguientes topologías en X.

- $\mathcal{T}_1$ es la topología más fina que hace continuas a todas las funciones $f_j : X_j \to X$, $j \in J$.

- $\mathcal{T}_2$ es la topología generada por la sub-base

$$\mathcal{B} = \{U \subseteq X \ / \ (f_j)^{-1}(U) \text{ es abierto en } X_j \text{ para todo } j \in J\}.$$

- $\mathcal{T}_3$ es la única topología en X que cumple la siguiente propiedad: 'Para todo espacio topológico Z y para toda función $f : X \to Z$, f es continua si y sólo si $f \circ f_j$ es continua para todo $j \in J$'.

(a) Demostrar que la topología $\mathcal{T}_1$ está bien definida.

(b) Demostrar que la topología $\mathcal{T}_3$ está bien definida.

(c) Probar que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$.

Ejercicio 20. (**L**) Sea $\{X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Demostrar que existe un espacio topológico X junto con funciones continuas $i_j : X_j \to X$ con la siguiente propiedad universal: 'Para todo espacio topológico Z y para toda familia de funciones continuas $f_j : X_j \to Z$, existe una única función continua $f : X \to Z$ tal que $f \circ i_j = f_j$ para todo $j \in J$'. Demostrar también que X es único salvo homeomorfismos.

Ejercicio 21. Sea $\{X_j \ / \ j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{j \in J} X_j$ el coproducto. Para cada $\alpha \in J$, sea $i_\alpha : X_\alpha \to \coprod_{j \in J} X_j$ la inclusión.

(a) Probar que i_α es subespacio para todo $\alpha \in J$.

(b) Probar que las funciones i_α, $\alpha \in J$, son abiertas y cerradas.

Ejercicio 22. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Probar que si f es final e inyectiva entonces es inicial.

Ejercicio 23. (**L**) Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Probar que si f es inicial y sobreyectiva entonces es cociente.

Ejercicio 24. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ entonces f es un cociente.

Ejercicio 25. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

(a) Sea $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio y sea $f = p_1|_X$. Probar que f es cerrada pero no abierta.

(b) Sea $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio y sea $g = p_1|_Y$. Probar que g no es abierta ni cerrada pero es cociente.

Ejercicio 26. Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos.

(a) $\sim$ es la relación de equivalencia definida por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.

(b) $\sim$ es la relación de equivalencia definida por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Ejercicio 27. (**L**) Sea $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to X$ por

$$g(x,y) = \begin{cases} (x,0) & \text{si } x \neq 0 \\ (0,y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Es g continua?

(b) Hallar una base para la topología cociente en X inducida por g.