Cálculo I

Año 2010

Práctica 2: Números reales y sucesiones de números reales

Ejercicio 1. Demostrar lo siguiente:

(a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$ entonces $x = 1$.

(b) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

(c) Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ o $x = -y$.

(d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

(e) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

(f) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ejercicio 2. Demostrar lo siguiente:

(a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

(b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

(c) Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$.

(d) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

(e) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

(f) Si $a > 1$ entonces $a < a^2$.

(g) Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.

(h) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$.

(i) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

(j) Si $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.

Ejercicio 3. Demostrar lo siguiente:

(a) Si $0 \leq x < y$ entonces $x^n < y^n$.

(b) Si $x < y$ y n es impar entonces $x^n < y^n$.

(c) Si $x^n = y^n$ y n es impar entonces $x = y$.

(d) Si $x^n = y^n$ y n es par entonces $x = y$ o $x = -y$.

Ejercicio 4. Hallar todos los números reales x que satisfacen cada una de las siguientes desigualdades.

(a) $4 - x < 3 - 2x$

(b) $5 - x^2 < 8$

(c) $5 - x^2 < -2$

(d) $(x-1)(x+3) > 0$

(e) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(f) $x^2 + x + 1 > 3$

(g) $x^2 - x + 10 < 16$

(h) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$

(i) $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$

(j) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-3} < 0$

Ejercicio 5. Dar una expresión equivalente de cada una de las siguientes expresiones utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

(a) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$

(b) $||a+b| - |a| - |b||$

(c) $||a+b| + |c| - |a+b+c||$

(d) $|x^2 - 2xy + y^2|$

(e) $||\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}||$

Ejercicio 6. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $|x+3| < 1$;

(b) $|x-3| \geq 10$;

(c) $|x| > |x+3|$;

(d) $|3x-1| < |x-1|$;

(e) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$.

Ejercicio 7. Representar los siguientes conjuntos en la recta numérica.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 1 \text{ y } x \notin \mathbb{Z}\}$;

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < |2-x|\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \leq x^3\}$.

Ejercicio 8.

(a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

1) $\mathbb{R}_{>0}$;
2) $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

1) $\mathbb{Z}$;
2) $\{x^{-1} : x \in \mathbb{R} \text{ y } x < 0\}$;
3) $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

Ejercicio 9. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo o mínimo, y, en caso de poseerlos, calcularlos:

(a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$;

(b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 10. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x+2| - |x-1|| < 1\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \left|x^3 - 1\right| + \left|2 - x^3\right| = 1\}$.

Ejercicio 11.

(a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.

(b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

Ejercicio 12. Calcular

(a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $\inf\{(1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 13. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = 2^n$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = 5 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$

(g) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$

(h) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}$

Ejercicio 14. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_1 = 16$ y $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_1 = 3$ y $a_{k+1} = 2(a_k - 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_1 = 4$ y $a_{k+1} = (\frac{k+1}{2})a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_1 = 6$ y $a_{k+1} = (\frac{1}{3})(a_k)^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 15. Para cada una de las siguientes sucesiones escribir los siguientes dos términos y hallar una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.

(*a*) $2, 5, 8, 11, \ldots$

(*b*) $3, 7, 11, 15, \ldots$

(*c*) $\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$

(*d*) $5, 10, 20, 40, \ldots$

(*e*) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

(*f*) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

(*g*) $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$

(*h*) $2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \ldots$

(*i*) $1+\frac{1}{2}, 1+\frac{3}{4}, 1+\frac{7}{8}, 1+\frac{15}{16} \ldots$

(*j*) $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

(*k*) $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

(*l*) $\dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{2}{3\cdot 4}, \dfrac{3}{4\cdot 5}, \dfrac{4}{5\cdot 6}, \ldots$

(*m*) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{120}, \ldots$

(*n*) $1, -\dfrac{1}{1\cdot 3}, \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}, -\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, \ldots$

Ejercicio 16. Para cada una de las siguientes sucesiones decidir si son monótonas crecientes, monótonas decrecientes o ninguna de las dos cosas y analizar la existencia de cotas superiores e inferiores de la sucesión.

(*a*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = 4 - \frac{1}{n}$

(*b*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \dfrac{3n}{n+2}$

(*c*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \dfrac{n}{2^{n+2}}$

(*d*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{n}\right)$

(*e*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(*f*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(*g*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

(*h*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \sin(\frac{n\pi}{6})$

(*i*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$

Ejercicio 17. Mostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\epsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ϵ	$0,1$	$0,001$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

Ejercicio 18. Utilizando la definición de límite demostrar que:

(*a*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0;$

(*b*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1;$

(*c*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2};$

(*d*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\sin n}{n^2+\cos n} = 1.$

Ejercicio 19. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponiendo que a_n, $b_m > 0$, investigar el límite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

cuando $n > m$, $n = m$ o $n < m$.

Ejercicio 20. Calcular:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k \sin n!}{n+1}$, si $0 \leq k < 1$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

Sugerencia: Usar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 21. Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando $n \to +\infty$ si:

(a) $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$;

(b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$.

Ejercicio 22. La sucesión de *Fibonacci* es la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unívocamente determinada por las condiciones

$$F_1 = F_2 = 1;$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \text{si } n \geq 0.$$

Mostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

Ejercicio 23. Definamos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poniendo $a_1 = \alpha \neq 0$, y

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

Ejercicio 24. Mostrar que si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, también lo hace $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Qué relación hay entre los límites de ambas sucesiones? ¿Vale la implicación recíproca?

Ejercicio 25. Analizar la convergencia de cada una de las siguientes sucesiones. Para aquellas que sean convergentes, calcular su límite.

(*a*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$

(*b*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = 1 + (-1)^n$

(*c*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \sin(n\pi)$

(*d*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

(*e*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

(*f*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

(*g*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

(*h*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

(*i*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1} - \dfrac{n^2}{2n-1}$

(*j*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$

Ejercicio 26.

(*a*) Calcular el límite de las sucesiones con términos generales dados por:

1) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;
3) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

(*b*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar mediante un ejemplo que puede existir $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y no existir $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$.

Ejercicio 27. Probar que, si $|x| < 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con término general dado por

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 28. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(*a*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

(*b*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{n^4 - n + 2^n n}{(n^3-1)2^n}$

(*c*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{8^n - 4^n}{3^n}$

(*d*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}{n}$

(*e*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(*f*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$

(*g*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$

(*h*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{n}{e^n}$

(*i*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$

(*j*) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$

Ejercicio 29. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}$

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(n^4 + n\right)^{1/n^5}$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$