Cálculo I

Año 2010

Práctica 4: Límite y continuidad

Ejercicio 1. Hallar los siguientes límites y demostrarlos por definición.

(a) $\lim_{x\to -3}(3x+2)$

(b) $\lim_{x\to 4} x^2$

(c) $\lim_{x\to 1}(-x^2+1)$

(d) $\lim_{x\to 2}(-x^2+x-2)$

(e) $\lim_{x\to -4}(x+3)^2$

(f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x}$

(g) $\lim_{x\to -3}\dfrac{2}{x+2}$

(h) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x}$

(i) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}$

Ejercicio 2. Usando las propiedades básicas de los límites funcionales calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado.

(a) $\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2)\sqrt{3x-1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\ln(x+1)$

(c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{e^{2x+5}}{x+2}$

(d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

(e) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+5}}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{4x+1}-3}$

(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x+\tan\ x}{\cos(\frac{2x}{3})}$

(h) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$ con $t\in\mathbb{R}$, t fijo

(j) $\lim_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+9x+2}{x^2-4}$

(k) $\lim_{x\to b}\dfrac{x^3-b^3}{x-b}$

(l) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

(m) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

(c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

(d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}$

(f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+3x^2-2x-2}$

(g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

(h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$

(j) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(k) $\lim_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

(l) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^2-4}$

Ejercicio 4.

(a) Hallar dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existen, pero existe $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))$.

(b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones y sea $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe.

Ejercicio 5. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq a$. ¿Es cierto que $\lim_{x\to 0} f(x) < \lim_{x\to 0} g(x)$? En caso de ser verdadero, demostrarlo y en caso de ser falso dar un ejemplo que muestre su falsedad.

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ si y sólo si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Sugerencia: Demostrar y utilizar la desigualdad $||a|-|b|| \leq |a-b|$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Demostrar que la recíproca del item anterior es falsa encontrando un contraejemplo.

Ejercicio 7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Decidir si existen $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ demostrando la respuesta.

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites y demostrarlos por definición.

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2-2x+1}$ (c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2x-4)^3}$ (d) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(2x-4)^3}$

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes funciones decidir si los límites laterales para x tendiendo a -2 dan $+\infty$ o $-\infty$.

(a) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ (c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ (d) $f(x) = \sec\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

Ejercicio 10. Calcular el dominio natural y hallar las asíntotas verticales (si existen) de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{2+x}{1-x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(c) $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$

(e) $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(g) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$

(h) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

(i) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

(*j*) $f(x) = \sec(\pi x)$ (*k*) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ (*l*) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

Ejercicio 11.

(*a*) Hacer un gráfico aproximado de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(*b*) Verificar gráficamente que vale $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ y demostrarlo por definición.

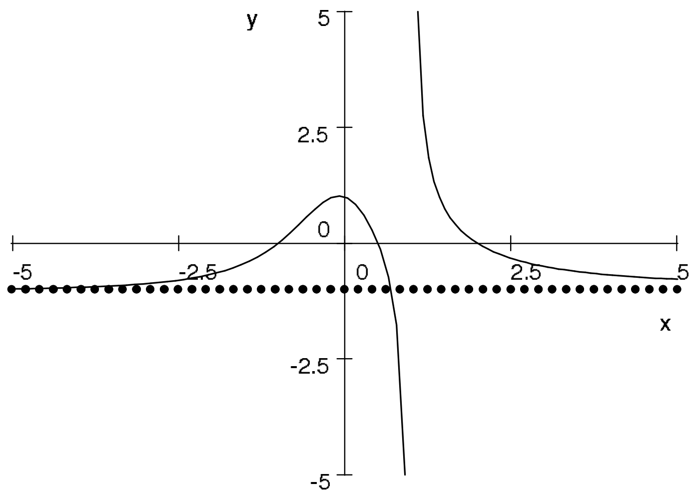
(*c*) Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$.

Ejercicio 12. Calcular los siguientes límites y demostrarlos por definición.

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+3}$ (*c*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-x}$ (*e*) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{2x+1}$

(*b*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1}$ (*d*) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+3}$ (*f*) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^4+1}$

Ejercicio 13. Consideremos una función $f(x)$ cuyo gráfico es:



(*a*) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.

(*b*) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -1$?

(*c*) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?

(*d*) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = m$, donde m es un determinado número real? Considerar todas las posibilidades.

Ejercicio 14. Calcular los siguientes límites:

(*a*) $\lim_{x\to+\infty}(x^7 - 10x^3 + 3)$

(*b*) $\lim_{x\to+\infty}(-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(*c*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(*d*) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(*e*) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(*f*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(*g*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{4 + x}$

(*h*) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

(*i*) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

(*j*) $\lim_{x\to-\infty} \cos x$

(*k*) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

(*l*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$

(*m*) $\lim_{x\to+\infty} (\ln\ x - 2\ln(x + 1))$

(*n*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

Ejercicio 15. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m cuando se mueve a la velocidad v tiene masa dada por la expresión

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

donde c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

Ejercicio 16. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados 'reclutas') que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \dfrac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Demostrar que, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

Ejercicio 17. Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{l}{1 + ke^{-at}}$$

donde l, k y a son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo t y donde $a > 0$.

(*a*) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?

(*b*) ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de $f(t)$ cuando $t \to +\infty$.)

(*c*) Si l y k fueran números grandes (respecto de los valores de t) la función $f(t)$ es próxima a la función exponencial $g(t) = \dfrac{l}{1 + k}\ e^{at}$. Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$l = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para $t < 100$. Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale $100 < t < 200$ ¿Qué ocurre para $t > 200$?

Ejercicio 18. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}.\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x\to 2} (x^2-4)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)$

(d) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(h(x))$, donde $h(x)$ es cualquier función.

(e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \,.\, \cos\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

(f) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

Ejercicio 19. Calcular los siguientes límites recordando que $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ t}{t}=1$.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{5x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\ x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{x}$

(d) $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}(4x)}$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{6x}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\operatorname{sen}(5x).\operatorname{tg} x}$

(k) $\lim_{t\to 0}\frac{\sec t-1}{t\sec t}$

(l) $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t.\operatorname{tg} t}{t}$

(m) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

(n) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$

$(ñ)$ $\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)^2}{h}$

(o) $\lim_{\alpha\to\pi}\alpha\sec\alpha$

(p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}$

(q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

(r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\ x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(s) $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$

(t) $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin\ x}{h}$

(u) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos\ x}{h}$

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\ x}{x}$

(w) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

Ejercicio 20.

(a) Comprobar gráficamente que $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

(b) ¿Qué puede decir de $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}$ y de $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}$ para n par?

(c) La misma pregunta para n impar.

Ejercicio 21. Consideramos la función $f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}$

(a) Determinar el dominio de f.

(*b*) ¿Se puede calcular directamente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

(*c*) Determinar la función g definida por $g(h) = f(1+h)$.

(*d*) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Deducir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

(*e*) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

Ejercicio 22. Hallar todos los pares de números reales a y b para que verifican simultáneamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+1}-1}{x} = 2.$$

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes casos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y representar gráficamente.

(*a*) $f(x) = |3x-6|$

(*b*) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 24. Para cada uno de los siguientes items calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(*a*) $a = 3,\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & \text{si } x \le 3 \\ \frac{12-2x}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

(*b*) $a = 2,\qquad f(x) = \begin{cases} x^2-x-1 & \text{si } x \le 2 \\ \frac{\sin(x^2-2x)}{2(x-2)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(*c*) $a = -1,\qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le -1 \\ (2+t)^{\frac{t}{t+1}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Ejercicio 25. Calcular los siguientes límites.

(*a*) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$

(*b*) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(2x)}{\sin\, x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)^{\frac{\tan x}{3x}}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{x+1}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)}\right)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicio 26. Sabiendo que $\lim\limits_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e$ calcular los siguientes límites.

(*a*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^x$

(*b*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin\ x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(f) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(a+h)-\ln\ a}{h}$

(g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$

(h) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{\alpha+h}-e^{\alpha}}{h}$

Ejercicio 27. Calcular los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(\frac{x}{2})}{\pi-x}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin^2 x}{x+\sin\ 2x}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ \sin\dfrac{1}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

Ejercicio 28. Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Demostrar que $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t^2})^t$ es independiente de la elección de b.

Ejercicio 29. Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo.

(a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ en $x=0$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $x=0$

(d) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ en $x=0$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ en $x=2$

(f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x>2\\ 3 & \text{si } x=2\\ x^3-4 & \text{si } x<2\end{cases}$ en $x=2$

(g) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ en $x=2$

(h) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

Ejercicio 30. Determinar el dominio natural de cada una de las siguientes funciones. Luego hallar el conjunto de puntos de discontinuidad de cada una de ellas y redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas.

(a) $f(x)=x^2-2x+1$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(c) $f(x)=x+\operatorname{sen} x$

(d) $f(x)=\cos(\frac{\pi x}{2})$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

(f) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

(g) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

$(h)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$(i)\ f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

$(j)\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

$(k)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

$(l)\ f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$

$(m)\ f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$

$(n)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$

$(\tilde{n})\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$(o)\ f(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-4}{2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}-2}$

$(p)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$(q)\ f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$(r)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$(s)\ f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-4x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$(t)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$(u)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$(v)\ f(x) = \begin{cases} 4x^2-3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$(w)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{4}) & \text{si } |x| < 1 \\ x & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

$(x)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2+x-2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$(y)\ f(x) = \dfrac{|x^2-4|x}{x+2}$

$(z)\ f(x) = \dfrac{|x^2+4x|(x+3)}{x^2-x}$

Ejercicio 31. En cada uno de los siguientes casos hallar todos los números reales a tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$(a)\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } > 2 \end{cases}$

$(b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ a-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$(c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 8 & \text{si } x = a \end{cases}$

Ejercicio 32. En cada uno de los siguientes casos hallar todos los pares de números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$(a)\ f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$$(b)\ \ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax+b & \text{si } x \in (0,2) \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2+b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(d)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Ejercicio 33. En cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para hacerla continua.

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Ejercicio 34. Analizar la continuidad en $x_0 = 5$ de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{45 \operatorname{sen}(x-5)\ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de f en $\mathbb{R} - \{5\}$?

Ejercicio 35. ¿Cómo debe elegirse la constante A en la definición de la siguiente función, si queremos que la función f resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 36. Demostrar que los siguientes polinomios tienen al menos una raíz real en los intervalos indicados.

(*a*) $P(x) = x^3 - 4x + 2$ en $[1,3]$.

(*b*) $P(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0,1]$.

(*c*) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2$ en $[-1,2]$.

(*d*) $P(x) = x^3 + x + 1$ en $(-1;0)$.

Ejercicio 37. Demostrar que los gráficos de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x_0 \geq 0$.

Ejercicio 38. Demostrar la existencia de $x_0 \in (1, e)$ tal que $\dfrac{\ln x_0}{x_0} = \dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 39. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{4 - x^2}$ en los intervalos $[-4; -3], [-3; 3]$ y $[-1; 1]$.

Ejercicio 40. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra $\$1,10$ por kg en compras de menos de 8kg, mientras que cobra $\$1$ por kg si se compra 8kg o más.

(a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(b) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

(c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre $7,5$kg de este producto.

Ejercicio 41. La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a $\$1,20$ por kg los primeros 5kg, y para compras mayores a 5kg cobra $\$6$ más $\$0,90$ por cada kilo que sobrepase los 5.

(a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

(b) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.