
Cálculo I

Año 2010

Práctica 5: Derivadas

Notaciones: Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_1 \in \mathbb{R}$ y un número $\Delta x \in \mathbb{R}$ que llamaremos incremento, se define $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. La derivada de f respecto de x se notará indistintamente por f' , $D_x f$ o $\frac{df}{dx}$. Observar que se tiene entonces que $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, en el caso en que este límite exista.

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 - 4x + 7$ y $x_1 = 3$.

- Para $\Delta x_1 = 1, \frac{1}{2}, -1$, calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1 + \Delta x_1, f(x_1 + \Delta x_1))$. Graficar la función y las tres rectas secantes en un mismo gráfico.
- Dar una expresión (en función de h) de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_1 + h, f(x_1 + h))$ (donde $h \neq 0$).
- Calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_1, f(x_1))$ como límite de pendiente de rectas secantes.
- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_1, f(x_1))$.
- Repetir los items anteriores para $f(x) = 2 - x^3$ y $x_1 = 1$.

Ejercicio 2. En una experiencia cuantitativa, la medición $f(t)$ realizada después de t horas está expresada por $y = f(t) = t^2 + 5t + 100$, donde $0 < t < 24$. Si evaluamos esta magnitud cerca de $t_1 = 3$ para $\Delta t \neq 0$, determine Δy y el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Luego calcule la velocidad instantánea de crecimiento de y en $t_1 = 3$.

Ejercicio 3. En cierta reacción química la cantidad de moles de moléculas de cierto compuesto (en función del tiempo) está dada por $y = g(t) = -t^2 + 10t - 3$, donde t es el tiempo transcurrido desde que se inició la reacción y $0 < t < 9$. Encuentre la velocidad instantánea de cambio de y respecto de t en $t_0 = 3$.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes funciones, calcule (si existe) la derivada en los puntos indicados usando la definición.

- $f(x) = x^2 + 1$, en $x = 1$ y $x = -2$.
- $g(x) = x^3 + 2$, en $x = 1$ y $x = -2$.
- $h(x) = |x - 2|$, en $x = 4$, $x = 1$ y $x = 2$.
- $i(x) = \sqrt{x}$, en $x = 1$ y $x = 4$.
- $j(x) = \sqrt{|2x - 1|}$, en $x = 5$ y $x = \frac{1}{2}$.
- $k(x) = \ln x$, en $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 5.

- (a) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine $f'(x_0)$ para $x_0 \neq 0$.
- (b) Sea $g(x) = e^{-x}$. Calcule $g(0) + g'(0)$.
- (c) Sean $h(x) = 3 - x$ y $m(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$. Calcule $\frac{m'(1)}{h'(1)}$.

Ejercicio 6. Calcule, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones.

- (a) $f(x) = x^2 + 1$ (f) $f(x) = \sqrt{x}$
- (b) $f(x) = x^3$ (g) $f(x) = \sin x$
- (c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$ (h) $f(x) = \cos x$
- (d) $f(x) = \frac{3}{x+4}$ (i) $f(x) = e^x$
- (e) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (j) $f(x) = \ln x$

Ejercicio 7.

- (a) Dada la función $f(x) = |x| + x$, calcular $f'(1)$ y $f'(-2)$. ¿Existe $f'(0)$?
- (b) Dada la función $g(x) = x \cdot |x|$, calcular $g'(1)$ y $g'(-2)$. ¿Existe $g'(0)$?
- (c) Determinar $g'(x)$.

Ejercicio 8. Dadas las siguientes funciones con dominio y codominio \mathbb{R} :

$$f(x) = |x| \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Demuestre que las tres funciones son continuas en $x = 0$.
- (b) Realice los gráficos de estas funciones.
- (c) Demuestre que f y g no son derivables en $x = 0$.
- (d) Estudiar la derivabilidad de $h(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio 9. Calcule $\frac{df}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación.

- (a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ (e) $f(x) = e^x \cos x + \ln 3$
- (b) $f(x) = (x+2)(x+3)(3x+1)(2+5x^2)$ (f) $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{3} + e^x$
- (c) $f(x) = 7 \cos x + 5 \sin x + xe^x$
- (d) $f(x) = 2x \sin x - (x^2 - 2)e^x$ (g) $f(x) = x(3 + x^2) + \ln 2$

$$(h) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(i) f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$(j) f(x) = \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x}$$

$$(k) f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x^2 + 1}$$

$$(l) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x \ln x}$$

$$(m) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \sin x$$

$$(n) f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$(\tilde{n}) f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$$

$$(o) f(x) = \frac{x + e^x}{5 - x} + \operatorname{tg} x$$

$$(p) f(x) = (\ln x \log_a x) - (\ln a \log_a x)$$

Ejercicio 10. Una bola de radio r tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y superficie $S(r) = 4\pi r^2$.

(a) Demuestre que $S(r) = \frac{dV}{dr}$.

(b) Halle una relación análoga entre el área de un círculo de radio r y la longitud de su circunferencia.

Ejercicio 11. Un tanque cilíndrico de 2m de radio se está llenando a razón de 1m^3 cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

Ejercicio 12. Calcule $D_x f$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena, es decir la propiedad de derivación de las funciones compuestas.

(a) $f(x) = (1 + x)^{129}$

(b) $f(x) = \cos(3x)$

(c) $f(x) = \ln(\sin x)$

(d) $f(x) = \operatorname{tg}(5x^5)$

(e) $f(x) = \ln(x^5)$

(f) $f(x) = 3 \sin^4 x$

(g) $f(x) = \ln^5 x$

(h) $f(x) = e^{x^2+3x}$

(i) $f(x) = \ln(e^x + \sin 5x)$

(j) $f(x) = 2^{\sin x}$

(k) $f(x) = 3^{\cos x} + \sin^2 x$

(l) $f(x) = e^{\sin x} - 3\pi e^{\operatorname{tg} x}$

(m) $f(x) = (a + bx^4)^{\frac{1}{3}}$

(n) $f(x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(\tilde{n}) $f(x) = 3^{\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}} + \frac{\sin^3(ax)}{3 \cos(bx)}$

(o) $f(x) = \ln(\sin(x^2)) + (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} - e^{\cos(2x)}$

(p) $f(x) = (3 \cos^3 x)^{-1} - (\sin(\ln x))^{-1}$

(q) $f(x) = 3 \sin^5(x^3) + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

(r) $f(x) = [\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \ln x)]^{\frac{1}{4}}$

(s) $f(x) = \sin^3(\ln \sqrt{x}) \cos^2(e^{3x} + 1)$

Ejercicio 13.

(a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x$. Calcular $(f^{-1})'(0)$ y $(f^{-1})'(2)$.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{11} + x^9 + 2x^3 + 2x + 5$. Calcular $(f^{-1})'(5)$.

Ejercicio 14. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \arcsin x$

(d) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

(b) $f(x) = \arccos x$

(e) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \arctan x$

(f) $f(x) = \ln(\arccos x)$

Ejercicio 15. Usando el método de derivación logarítmica calcule las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{3x}$

(f) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

(b) $f(x) = (\sqrt{x+1})^x$

(g) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

(c) $f(x) = (\ln x)^x$

(h) $f(x) = (\ln x)^{x^2+x}$

(d) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

(i) $f(x) = (\operatorname{sen}^3 x)^{\ln x}$

(e) $f(x) = (\cos x)^{e^x}$

(j) $f(x) = x^{(x^x)}$

Ejercicio 16. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\operatorname{sen} 3x}$

(b) $f(x) = x[(\operatorname{sen} x)^{x^2} + \pi e^x]$

(c) $f(x) = \frac{x e^{(\sqrt[3]{x} + \cos x - 1)}}{\operatorname{sen} x + \ln(x^2 + e)} + (\cos x)^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{2})^\pi$

Ejercicio 17. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectilínea con las siguientes leyes del movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10 \qquad g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

(a) Determine el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.

(b) Calcule la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

Ejercicio 18. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 34,3 m/s se desplaza siguiendo la ley de movimiento $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$.

(a) Calcule la velocidad y la aceleración en los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$.

(b) Determine el instante t_3 en el que la piedra alcanza la altura máxima. (Pista: la velocidad en el instante t_3 debe ser 0.)

Ejercicio 19. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

(a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $a = 1$, $a = 0$ (c) $f(x) = \ln x$ en $a = 1$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \frac{\pi}{2}$ (d) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ en $a = 2$

- (e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $a = 0$ (g) $f(x) = e^{-x^2}$ en $a = 0$, $a = 1$
 (f) $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$ en $a = 4$ (h) $f(x) = e^x(x + \ln x)$ en $a = 1$

Ejercicio 20. Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$.

- (a) Probar que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.
 (b) Verificar que en uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma recta tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

Ejercicio 21. Determine en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$. Calcular la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 23. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(g(x^2 + x)) + 3g(x) = 3 \operatorname{tg}(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y donde g cumple, además, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 2$.

- (a) Calcular $f'(0)$.
 (b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

Ejercicio 24. El ‘Teorema del coseno’ permite expresar la longitud del lado a del triángulo $\triangle ABC$ a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto A por la fórmula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Si mantenemos b y c constantes, a resulta ser función del ángulo A . En estas condiciones, demuestre que $\frac{da}{dA} = h_a$ es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base a .

Ejercicio 25. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

- (a) Analice la continuidad de f en $x = 2$.
 (b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$.

Ejercicio 26. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = |(x-1) \cdot (x+1)|$
 (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$
 (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ (e) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq -1 \\ \frac{\cos(x\pi)}{\pi} & x > -1 \end{cases}$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen}(4|x|)$$

Ejercicio 27. Hallar todos los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que existe $f'(1)$ si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 28. Calcule las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = 3x^3 + 5x - 1$$

$$(d) f(x) = (x^2 + 1)^5$$

$$(b) f(x) = \ln(7x)$$

$$(e) f(x) = \operatorname{sen}(4x)$$

$$(c) f(x) = e^{-x}$$

$$(f) f(x) = \cos(2x^3)$$

Ejercicio 29.

(a) Calcule las derivadas séptima y octava de $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$.

(b) Calcule las derivadas de orden n y $n+1$ de un polinomio de grado n .

(c) Calcule la derivada octava de $f(x) = \operatorname{sen} x$. ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de $f(x)$?

(d) Lo mismo que en el ítem (c) pero para $g(x) = \cos x$.