Cálculo I

Año 2010

Práctica 6: Aplicaciones de la derivada

Ejercicio 1. Decida si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos indicados en cada caso. Si la respuesta fuera afirmativa, determine c en el correspondiente intervalo abierto, tal que $f'(c) = 0$:

(a) $f(x) = x^2 + 3$ en $[-1; 2]$.

(b) $f(x) = x^2 + 3$ en $[-1; 1]$.

(c) $f(x) = |x|$ en $[-1; 1]$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $[0; 2]$.

(e) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0; 4]$.

Ejercicio 2. Consideramos la función $f : [-2; 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2; 1] \\ 3x - 2 & \text{si } x \in (1; 2] \end{cases}$$

(a) Verifique que $f(x)$ es continua en $[-2; 2]$, y que $f(-2) = f(2)$.

(b) Compruebe que f no es derivable en $x_0 = 1$.

(c) Verifique que $f'(0) = 0$.

(d) ¿Surge de las anteriores comprobaciones una contradicción al Teorema de Rolle?

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ demuestre que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.

Ejercicio 4. La temperatura (en grados centígrados) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo con la siguiente ley: $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t el tiempo medido en horas.

(a) Sin derivar $T(t)$, demuestre que en algún instante del lapso $[0; 4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

(b) Determine $t_0 \in (0; 4)$ tal que $T'(t_0) = 0$.

Ejercicio 5. Decida si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Lagrange en los intervalos indicados en cada caso. Si la respuesta fuera afirmativa determine c perteneciente al correspondiente intervalo abierto tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x$ en $[-2; 2]$.

(b) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0; 5]$.

(c) $f(x) = (x-1)^2$ en $[0; 3]$.

(d) $f(x) = (x-1)^2$ en $[3; 5]$.

Ejercicio 6. Demuestre las siguientes desigualdades aplicando el teorema de Lagrange o el teorema de Cauchy.

(a) $\operatorname{sen} x \leq x \quad \forall x \geq 0.$

(b) $\operatorname{sen} x \geq x \quad \forall x \leq 0.$

(c) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

(d) $\ln(1 + x) < x \quad \forall x > 0.$

(e) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(f) $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1) \quad \forall x > 1.$

(g) $1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(h) $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x} \quad \forall x > 0.$

Ejercicio 7. Calcule los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hospital, siempre que ello sea posible:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1 - x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \operatorname{sen} x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi - 2x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi - 2x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln \frac{1}{x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

($ñ$) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^4}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{4x^5}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{4x^5}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x - \operatorname{sen} x) \ln x$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} \right)$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\operatorname{cotg} x}$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

(α) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{sen} x}$

(β) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{1 - \ln x}}$

Ejercicio 8. ¿Es aplicable la regla de L'Hospital para calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\ x}$$

Si la repuesta fuera afirmativa, aplique la regla y calcule el límite. Si la respuesta fuera negativa, explique por qué no se puede aplicar y calcule el límite de otra manera.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-4} & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{20\ \operatorname{sen}(x-4)\ln(\frac{3}{4}x-2)}{x-4} + 12 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

(a) Estudie la derivabilidad de f en $\mathbb{R} - \{4\}$.

(b) Analice la derivabilidad de f en $x = 4$ mediante el estudio de los correspondientes cocientes incrementales.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\left(\dfrac{1}{3x^2+2x}\right)^{\operatorname{sen}\ x} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Estudie la derivabilidad de f en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) Analice la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante el estudio de los correspondientes cocientes incrementales.

Ejercicio 11. Calcule (si existe) $f'(0)$ para las siguientes funciones

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{\sqrt[3]{x}+\cos(x-1)}}{\operatorname{sen} x + \ln(x^2+e)} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (\cos\ x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ \operatorname{sen}(x^2+\sqrt[3]{x})}{\operatorname{sen}\ x + e^{\cos\ x}} & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 12. Determine los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3x + 1$ en $[-1; 3]$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $[0; \pi]$

(c) $f(x) = |x-2|$ en $[-1; 1]$

(d) $f(x) = x^2 + x + 1$ en $[-2; 2]$

Ejercicio 13. Decida si x_0 es un extremo local de f en cada caso:

(a) $f(x) = x^2 + 1, \qquad x_0 = 0.$

(b) $f(x) = |x-2|, \qquad x_0 = 2.$

(c) $f(x) = x^6 + 5, \qquad x_0 = 0.$

(d) $f(x) = x^3, \qquad x_0 = 0.$

Ejercicio 14. Determine todos los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = x^3 - 6x + 2$

(*b*) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x} \quad (0 \neq x \neq 1)$

(*d*) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(*e*) $f(x) = x \ln\, x \quad (x > 0)$

(*f*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

(*g*) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$

(*h*) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$

Ejercicio 15. Determine y clasifique los extremos locales de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones:

(i) $f'(-1) = f'(-\frac{1}{2}) = f'(0) = f'(\frac{3}{2}) = 0$.

(ii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{3}{2})$.

(iii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

A partir de todos estos datos determinar todos los máximos y mínimos locales de la función f. Justifique sus afirmaciones. Dibuje una función que cumpla con estas condiciones.

Ejercicio 17. Para cada una de las siguientes funciones estudie el dominio natural, las posibles asíntotas, los máximos y mínimos locales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el sentido de la curvatura y los puntos de inflexión. Sobre la base de todos estos datos, realice un gráfico aproximado de f.

(*a*) $f(x) = 12x^2(x+1)$

(*b*) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x}$

(*d*) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$ en $[-1; 1]$

(*e*) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(*h*) $f(x) = e^{-x^2}$

(*i*) $f(x) = x \ln\, x$

(*j*) $f(x) = xe^{-x}$

(*k*) $f(x) = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

(*l*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

(*m*) $f(x) = e^x(x^2+2)$

(*n*) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

($\tilde{n}$) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

(o) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$

(p) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(q) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$

(r) $f(x) = xe^x$

(s) $f(x) = x^2 + |x|$

(t) $f(x) = x - \ln\ x$

(u) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

Ejercicio 18. La función $f(t) = \dfrac{t}{20t^2+50t+80}$ (definida para $t \geq 0$) expresa la concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis. Analizar las variaciones de dicha concentración con el paso del tiempo, indicando los intervalos de tiempo en los cuales la concentración aumenta y aquellos en los cuales disminuye.

Ejercicio 19. La densidad del agua a 0°C es de 1 g/cm^3 pero varía levemente al variar la temperatura de acuerdo con la expresión:

$$S(t) = 1 + 5,3 \cdot 10^{-5}t - 6,53 \cdot 10^{-6}t^2 + 1,4 \cdot 10^{-8}t^3$$

donde $0 \leq t < 100$ que mide la temperatura en grados centígrados, y $S(t)$ es la densidad o peso específico del agua a la temperatura t. Sobre la base de dicha expresión, analizar el crecimiento y decrecimiento de la densidad en función de la temperatura del agua.

Ejercicio 20. El espacio recorrido por cierto móvil hasta el instante t se expresa por la función

$$f(t) = 3\cos(2t + \frac{\pi}{4})$$

(a) Grafique la función f.

(b) Determine la velocidad instantánea en el instante t. Grafique dicha velocidad.

(c) ¿Para cuáles valores de t dicha velocidad es máxima en valor absoluto?

Ejercicio 21. Se realizaron 10 mediciones de una magnitud física y se obtuvieron los valores

$$2 \qquad 1,9 \qquad 2,2 \qquad 2,3 \qquad 2 \qquad 1,8 \qquad 1,9 \qquad 2,1 \qquad 2 \qquad 1,8$$

Para cada valor x atribuido a dicha magnitud llamaremos $S(x)$ a la suma de los cuadrados de los errores cometidos por dichas mediciones, es decir:

$$S(x) = (x-2)^2 + (x-1,9)^2 + (x-2,2)^2 + \cdots$$

Verifique que $S(x)$ es mínima cuando x es el promedio de las mediciones obtenidas.

Ejercicio 22. Los alumnos de un colegio deciden contratar un servicio de transporte para una excursión turística. La empresa ofrece servicio hasta para 100 personas, pero con un mínimo de 40 pasajeros. El precio del servicio (por pasajero) será de \$15 si viajan precisamente 40 personas, pero se ofrece bajar el precio individual en \$0,10 por cada cliente que exceda los 40 pasajeros (por ejemplo, si viajaran 50 personas, cada una pagaría \$14). ¿Cuántas personas deben viajar para que el ingreso total de la empresa de transporte sea máximo?

Ejercicio 23.

(a) Demostrar que una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con $a \neq 0$) puede tener a lo sumo dos extremos relativos.

(b) Dar un ejemplo de una tal función con dos extremos relativos.

(c) Dar un ejemplo de una tal función sin extremos relativos.

(d) ¿Puede una tal función tener un único extremo relativo? ¿Por qué?

Ejercicio 24. Exprese el número 16 como suma de dos números cuyo producto sea máximo.

Ejercicio 25. Determine dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea máximo.

Ejercicio 26. ¿Cuándo es mínima la suma de un número x y el cuadrado de su recíproco (es decir, su inverso multiplicativo)?

Ejercicio 27. Entre todos los rectángulos de área A determine:

(a) aquél que tiene perímetro mínimo.

(b) aquél que tiene la diagonal más corta.

Ejercicio 28. Se desea construir una caja de base cuadrada con tapa, y que tenga 1 dm^3 de capacidad. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha caja para que la cantidad de material utilizado en su confección sea mínima?

Ejercicio 29. De una pieza rectangular de cartón de 25 cm de largo y 10 cm de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

Ejercicio 30. Un rectángulo está inscripto en un semicírculo de radio 10 (es decir que sus cuatro vértices están en el perímetro del semicírculo). Calcule las dimensiones del rectángulo que hacen máxima su área.

Ejercicio 31. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$, determine cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

Ejercicio 32. Hallar el o los puntos de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ que estén más cerca del punto $(0, 2)$.

Ejercicio 33. Si hacemos girar en el espacio un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, genera, en su rotación, un cono circular recto. ¿Cuál será el mayor volumen V de un cono generado de esta manera por un triángulo cuya hipotenusa mide 6 cm?

Ejercicio 34. Un sólido se forma pegando dos semiesferas a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es 12 dm^3. Encontrar el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.

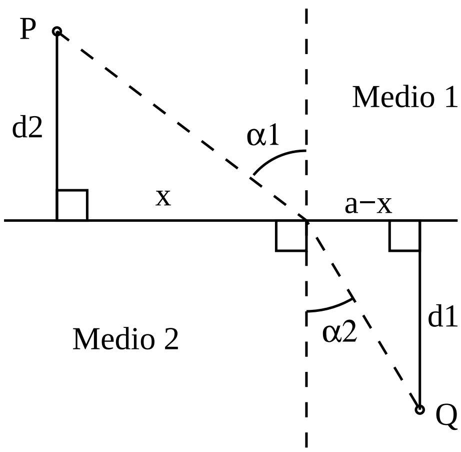
Ejercicio 35. Dos postes, uno de 4 metros de altura y otro de 6 metros de altura están a 15 metros de distancia. Se sostienen por dos cables que van desde la parte superior de cada poste hasta una estaca ubicada en el segmento que une las bases de ambos postes. ¿A qué distancia de cada poste deberá ubicarse la estaca para que la longitud total del cable utilizado sea la mínima posible?

Ejercicio 36. Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe tener 18000 m^2 de superficie. ¿Qué dimensiones debe tener el pastizal para que requiera la mínima cantidad de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?

Ejercicio 37. Un ganadero tiene 200 metros de cerado con los cuales desea delimitar dos corrales rectangulares iguales adyacentes. ¿Qué dimensiones deben tener los corrales de manera que encierren la mayor área posible?

Ejercicio 38. Un hombre se encuentra en un bote a 2 km del punto más cercano a la costa. Se dirige a un campamento localizado 3 km costa arriba y 1 km tierra adentro. El hombre puede remar a 2 km/h y caminar a 4 km/h. ¿En qué punto de la costa debe desembarcar para llegar al campamento lo antes posible? ¿Cuánto tardará en llegar al campamento en ese caso?

Ejercicio 39. Cuando la luz viaja en un medio transparente e incide sobre la superficie de un segundo medio transparente, cambia de dirección. Este cambio de dirección recibe el nombre de *refracción*.



La *ley de Snell de la refracción* dice que $\dfrac{\text{sen}(\alpha_1)}{v_1} = \dfrac{\text{sen}(\alpha_2)}{v_2}$, donde v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los medios 1 y 2 respectivamente.
Demostrar que para viajar de los puntos P a Q, la luz sigue la trayectoria de tiempo mínimo.