Cálculo I

Año 2010

Práctica 7: Integrales - Parte 1

Ejercicio 1.

(a) Hallar en cada caso una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla

(i) $g'(x) = 2$

(ii) $g'(x) = x$

(iii) $g'(x) = \operatorname{sen} x$

(iv) $g'(x) = \cos x$

(v) $g'(x) = x^2$

(vi) $g'(x) = e^x$

(vii) $g'(x) = x + x^2$

(viii) $g'(x) = x^n$

(b) ¿Son únicas la funciones halladas?

(c) Para cada uno de los items (i) a (iv) hallar una función g que cumpla, además, que $g(0) = 5$.

(d) Para cada uno de los items (v) a (viii) hallar una función g que cumpla, además, que $g(1) = -1$.

Ejercicio 2. Verifique en cada caso que $F(X) + C$ (para $C \in \mathbb{R}$) son primitivas de $f(x)$.

(a) $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \neq -1; \quad F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ ; \quad F(x) = \ln|x|$

(c) $f(x) = e^x; \quad F(x) = e^x$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad F(x) = -\cos x$

(e) $f(x) = \cos x; \quad F(x) = \operatorname{sen} x$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad F(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

(g) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad F(x) = \arccos x$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; \quad F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \quad F(x) = \operatorname{tg} x$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}; \quad F(x) = -\operatorname{cotg} x$

Ejercicio 3. Calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int x^2\, dx$

(b) $\displaystyle\int x^{100}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int (3x - \cos x + 2\ \operatorname{sen} x)\, dx$

(e) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + 2x - e^x\right) dx$

(f) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{x})\, dx$

(g) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Ejercicio 4. Aplicando el método de sustitución calcule las siguientes primitivas

(a) $\int 5\cos(5x)\,dx$

(b) $\int \cos(x+5)\,dx$

(c) $\int \operatorname{sen}(7x)\,dx$

(d) $\int (t+1)(t^2+2t+3)^{\frac{2}{3}}\,dt$

(e) $\int e^{3x}\,dx$

(f) $\int (x+1)^{-1}\,dx$

(g) $\int x^{-1}\ln\ x\,dx$

(h) $\int (x+1)^{-1}\ln(x+1)\,dx$

(i) $\int xe^{x^2}\,dx$

(j) $\int x(x^2+1)^{-1}\,dx$

(k) $\int \cos x\operatorname{sen}^{-2}x\,dx$

(l) $\int (5-2x)^{-1}\,dx$

(m) $\int \cos^{-2}(2x)\,dx$

(n) $\int x^{-1}\cos(\ln\ x)\,dx$

(ñ) $\int x(1+3x^2)^{-1}\,dx$

(o) $\int (1+y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,dy$

(p) $\int (x^2+2x+5)^{-1}\,dx$

(q) $\int x(16+x^4)^{-1}\,dx$

Ejercicio 5. Calcule las siguientes primitivas aplicando el método de integración por partes.

(a) $\int x\operatorname{sen}x\,dx$

(b) $\int (x^2-2)e^{-x}\,dx$

(c) $\int x^3\cos x\,dx$

(d) $\int x\ln x\,dx$

(e) $\int x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

(f) $\int (t^2+t)(t+1)^{-5}dt$

(g) $\int \ln x\,dx$

(h) $\int \arccos x\,dx$

(i) $\int e^x\cos x\,dx$

(j) $\int e^{2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx$

Ejercicio 6. Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x)=\dfrac{3x-2}{(x+2)(x+3)}$

(b) $f(x)=4(x-2)^{-1}(x-1)^{-1}$

(c) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-4}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

(e) $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

(f) $f(x)=(x^2-1)^{-2}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x}$

(*h*) $f(x) = \dfrac{8x^3+7}{8(x+1)(x+\frac{1}{2})^2}$

(*i*) $f(x) = \dfrac{2(2x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$

(*j*) $f(x) = \dfrac{3}{(x^2+2x+3)(x+2)}$

(*k*) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+9)^2}$

(*l*) $f(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}$

Ejercicio 7. Calcule las siguientes primitivas que involucran funciones trigonométricas:

(*a*) $\displaystyle\int (\cos x)^3 \operatorname{sen} x \, dx$

(*b*) $\displaystyle\int (\operatorname{sen}(2x))^5 \cos(2x) \, dx$

(*c*) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \, dx$

(*d*) $\displaystyle\int (\cos t)^3 \sqrt{\operatorname{sen} t} \, dt$

(*e*) $\displaystyle\int (\cos(3x))^2 \, dx$

(*f*) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^2 \, dx$

(*g*) $\displaystyle\int x(\operatorname{sen} x)^2 \, dx$

(*h*) $\displaystyle\int (\sec(3x)) \, dx$

(*i*) $\displaystyle\int (\sec(5x))^4 \, dx$

(*j*) $\displaystyle\int (\sec(\pi x))^3 \, dx$

(*k*) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x)^3 \, dx$

(*l*) $\displaystyle\int (\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}x))^5 \, dx$

(*m*) $\displaystyle\int (\sec x)^2 \operatorname{tg} x \, dx$

(*n*) $\displaystyle\int (\sec x)^2 (\operatorname{tg} x)^2 \, dx$

(*ñ*) $\displaystyle\int (\sec x)^3 \operatorname{tg} x \, dx$

(*o*) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sec x} \, dx$

Ejercicio 8.

(*a*) Sean a y b números reales. Demostrar que para todo número real x se satisfacen las siguientes identidades:

- $\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx) = \dfrac{\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)}{2}$
- $\operatorname{sen}(ax)\cos(bx) = \dfrac{\operatorname{sen}((a-b)x) + \operatorname{sen}((a+b)x)}{2}$
- $\cos(ax)\cos(bx) = \dfrac{\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)}{2}$

(*b*) Utilizando las identidades del item anterior calcular las siguientes primitivas:

1) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x) \, dx$

2) $\displaystyle\int \cos(4t)\cos(-3t) \, dt$

3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(3t) \, dt$

4) $\displaystyle\int \cos(3x)\operatorname{sen}(-4x) \, dx$

Ejercicio 9. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{1}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

(*d*) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

(*e*) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

(*f*) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

(*g*) $\displaystyle\int \sqrt{4+9x^2}\,dx$

(*h*) $\displaystyle\int \sqrt{25-4x^2}\,dx$

(*i*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

(*j*) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

(*k*) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

(*l*) $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Ejercicio 10. Calcule las siguientes primitivas:

(*a*) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+1}}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx$

(*c*) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$

(*d*) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arc\,sen}\,x\,dx$

(*e*) $\displaystyle\int (1+\cos 2x)^{-2}\,\mathrm{sen}\,x\,dx$

(*f*) $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{sen}\,x-2)\cos x}{\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}\,x-2}\,dx$

(*g*) $\displaystyle\int \frac{xe^{3x^2}}{4+e^{3x^2}}\,dx$

(*h*) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\,x\,\ln(\cos x)\,dx$

(*i*) $\displaystyle\int x(\mathrm{sen}\,x+\frac{x}{2}\cos x)\sqrt{x^2\,\mathrm{sen}\,x}\,dx$

(*j*) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}\,dx$

(*k*) $\displaystyle\int x^5\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

(*l*) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^5\left(\frac{x}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{6}\right)\,dx$

(*m*) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\mathrm{arc\,tg}\,2x}}{1+4x^2}\,dx$

(*n*) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

(*ñ*) $\displaystyle\int \frac{e^x+3e^{2x}}{1-e^{2x}}\,dx$

(*o*) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(*p*) $\displaystyle\int \frac{\ln x+1}{x(\ln^2 x-3\ln x)}\,dx$

(*q*) $\displaystyle\int (x^3+x)\cos(x^2+1)\,dx$

(*r*) $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}\,dx$

(*s*) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

(*t*) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$

Ejercicio 11.

(a) Hallar $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$.

(b) Hallar $g(x)$ tal que $g'(x) = t\ \operatorname{sen}(5t)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(c) Hallar $h(x)$ tal que $h'(x) = \dfrac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Sabemos que f tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de f pasa por el punto $(2;3)$ y que $f'(x) = -x + a$ para cierto $a \in \mathbb{R}$. Hallar $f(x)$.

Ejercicio 13. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f_1(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt$

(b) $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$

(c) $f_3(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$

(d) $f_4(x) = \displaystyle\int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc\,tg} t\, dt$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

(e) $f_5(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t} dt$

(f) $f_6(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2} dt$

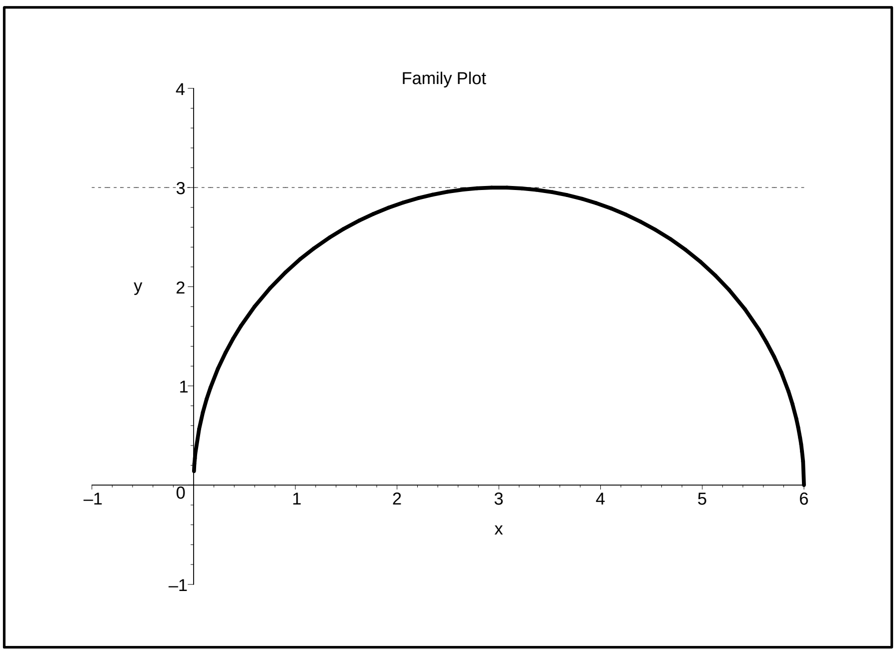
(g) $f_7(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \cos(t^2) dt$

(h) $f_8(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{e^x} t^2 dt$

Ejercicio 14. Determine los máximos y mínimos locales de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4)\ dt$$

Ejercicio 15. Sea $f : [0;6] \to \mathbb{R}$ una función continua, y sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. Si el gráfico de $F(x)$ es el siguiente



(*a*) Calcule $\int_0^6 f(t)\ dt$.

(*b*) Verifique que $f(3) = 0$.

(*c*) Verifique que $f(x) > 0$ en $[0;3)$, y $f(x) < 0$ en $(3;6]$.

(*d*) Demuestre que $\int_0^6 |f(t)|\ dt = 2\int_0^3 f(t)\ dt = 6$.

Ejercicio 16. Aplicando la Regla de Barrow, calcular

(*a*) $\int_0^1 e^t\,dt$

(*b*) $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

(*c*) $\int_0^x \cos t\,dt$

(*d*) $\int_1^x t^r\,dt$ (donde $x > 1$)

(*e*) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sen}\ t\,dt$

Ejercicio 17. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$. Sabemos que $x - 2$ es un factor de f.

(*a*) Determine a y factorice $f(x)$ totalmente.

(*b*) Haga un gráfico aproximado de $f(x)$.

(*c*) Calcule $\int_{-1}^2 f(x)\ dx$; $\int_2^{2,5} f(x)\ dx$; $\int_{-1}^{2,5} f(x)\ dx$.

Ejercicio 18. Calcule las siguientes integrales definidas.

(*a*) $\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^{-3}\,dx$

(*b*) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)^{-2}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

(*c*) $\int_3^7 x\ln x\,dx$

(*d*) $\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

(*e*) $\int_1^4 x^{-1}\cos(\ln\ x)\,dx$

(*f*) $\int_0^1 e^x(4+3e^x)\,dx$

(*g*) $\int_3^9 x\sqrt{x+1}\,dx$

(*h*) $\int_0^1 e^x(e^{2x}+e^x+1)^{-1}\,dx$

(*i*) $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$

(*j*) $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

Ejercicio 19. Calcular la integral definida $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ de dos maneras diferentes.

Ejercicio 20.

(a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$

(b) Utilizar la igualdad del item anterior para demostrar que $0 \leq \dfrac{22}{7} - \pi \leq \dfrac{1}{256} < 0{,}004$.

Nota: $\frac{22}{7}$ *es una buena aproximación de* π *que era utilizada en la antigüedad. Se cree que era conocida por los egipcios ya en el año 2500 A.C. puesto que la relación* $\frac{22}{7}$ *aparece en la arquitectura de la pirámide de Giza.*

Ejercicio 21. Calcule el área de la región limitada por:

(a) La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje x y las rectas $x = 1, x = 2$.

(b) La recta $y = -x + 5$, el eje x y las rectas $x = 6$, $x = 9$.

Ejercicio 22. En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje x y las rectas verticales indicadas.

(a) $y = x^3\ ,\ x = 2\ ,\ x = 5$.

(b) $y = x^2 - x + 1\ ,\ x = 0\ ,\ x = 1$.

(c) $y = x + \frac{1}{x}\ ,\ x = 1\ ,\ x = 2$.

Ejercicio 23. Determine $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que el área de la región encerrada entre el eje x, el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ sea $\frac{5}{2}$.

Ejercicio 24. Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso

(a) $y = 3x^2 - 7x\ ,\ y = x^2 + x - 6$

(b) $y^2 = x\ ,\ x - y = 2$

(c) $y = x^{1/3}\ ,\ x = 0\ ,\ y = 1$

(d) $y = e^x\ ,\ y = e^{-x}\ ,\ x = 1\ ,\ x = -1$

(e) $y = x^{1/2}\ ,\ y = x - 2\ ,\ x = 0$

(f) $y = x^2 - 1\ ,\ y = -x$

(g) $y = x^3 - x\ ,\ y = x$

(h) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a dicha curva en $x = 1$.

(i) $3y^2 - 3y = x - 1\ ,\ 2y^2 - 2y = x - 3$

Ejercicio 25. Sean $p(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es $a(t) = 4t - 16$ y tal que la posición inicial era $p(0) = 0$, y la velocidad inicial $v(0) = 30$.

(a) Determinar $v(t)$ y verificar que la velocidad es nula para $t = 3$.

(b) Obtener la expresión de $p(t)$ y calcular la posición para $t = 3$.

Ejercicio 26. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante t está dada por $a(t) = t(t-100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0, y su velocidad inicial era 25. ¿Cuál es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

Ejercicio 27. Una nave espacial está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea $a(t) = t^{1/2} + 1$ cuando $t > 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/s^2.

(a) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron 64 segundos desde el arranque?

(b) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

Ejercicio 28. El corredor H_1, que es especialista en los 100 metros llanos desarrolla una velocidad instantánea $v_1(t) = 10(1 - e^{-3t})$ donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor H_2 tiene una velocidad instantánea $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$.

(a) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros 10 segundos de carrera?

(b) ¿Y en los primeros 20 segundos?

(c) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de 100 metros?

(d) ¿Y una carrera de 200 metros?