Cálculo I

Año 2010

Práctica 8: Integrales - Parte 2

Ejercicio 1. Para cada uno de los siguientes items calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas dadas.

(*a*) $y = -x + 1$, $y = 0$ y $x = 0$.

(*b*) $y = 4 - x^2$, $y = 0$ y $x = 0$.

(*c*) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 4$.

(*d*) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ y $x = 0$.

(*e*) $y = x^2$ e $y = x^3$.

(*f*) $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$ e $y = 2$.

Ejercicio 2. Para cada uno de los siguientes items calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región limitada por las curvas dadas.

(*a*) $x = -y^2 + 4y$, $y = 1$ y $x = 0$.

(*b*) $y = x^2$, $y = 0$ e $y = 4$.

(*c*) $y = \sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$ y $x = 0$.

(*d*) $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$ e $y = 1$.

(*e*) $y = 3(2 - x)$, $y = 0$ y $x = 0$.

(*f*) $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = 2$ y $x = 3$.

Ejercicio 3. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h unidades sobre el ecuador $(0 \leq h < r)$. Hallar el volumen de la porción de esfera que queda sobre el plano.

Ejercicio 4. Un operario taladra un orificio cilíndrico de radio r a través del centro de una esfera de metal de radio R. Hallar el volumen del anillo resultante.

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes items hallar la distancia entre los puntos dados usando integrales. Verificar luego el resultado obtenido aplicando la fórmula de distancia entre puntos.

(*a*) $(0, 0)$ y $(5, 12)$.

(*b*) $(1, 2)$ y $(7, 10)$.

Ejercicio 6. Hallar la longitud de cada una de las siguientes curvas.

(*a*) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$.

(*b*) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$, $0 \leq x \leq 1$.

(*c*) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $1 \leq x \leq 8$.

(*d*) $y = \frac{1}{10}x^5 + \dfrac{1}{6x^3}$, $1 \leq x \leq 2$.

Ejercicio 7. Hallar la longitud del arco de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ que une los puntos $(-3, 4)$ y $(4, 3)$ y que contiene al punto $(0, 5)$. Notar que el resultado es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia.

Ejercicio 8. Un objeto parte del origen y se mueve sobre el semieje positivo del eje y, alejándose del origen. Al mismo tiempo, un perseguidor parte del punto $(1, 0)$ y se mueve siempre en dirección al objeto. La trayectoria del perseguidor está dada por la ecuación $y = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 2)$. Demostrar que cuando el perseguidor alcanza al objeto ha recorrido el doble de distancia que éste.

Ejercicio 9. Hallar el área de la superficie obtenida al girar cada una de las siguientes curvas alrededor del eje x.

(a) $y = \frac{1}{3}x^3, \ 0 \leq x \leq 1.$

(b) $y = 2\sqrt{x}, \ 4 \leq x \leq 9.$

(c) $y = \frac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}, \ 1 \leq x \leq 2.$

(d) $y = \frac{1}{2}x, \ 0 \leq x \leq 6.$

Ejercicio 10. Hallar el área de la superficie obtenida al girar cada una de las siguientes curvas alrededor del eje y.

(a) $y = \sqrt[3]{x} + 2, \ 1 \leq x \leq 8.$

(b) $y = 9 - x^2, \ 0 \leq x \leq 3.$

Ejercicio 11. Demostrar que el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura h cuya base es una circunferencia de radio r es $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

Ejercicio 12. Demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

Ejercicio 13. Decidir si cada una de las siguientes integrales es impropia. Justificar.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x-2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(x^2)\, dx$

Ejercicio 14. Decidir si cada una de las siguientes integrales impropias es convergente o divergente. En caso de que sean convergentes, calcularlas.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$

(*h*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx$

(*i*) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$

(*j*) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\,dx$

(*k*) $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

(*l*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^2+4}\,dx$

(*m*) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(*n*) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$

Ejercicio 15. Determinar todos los valores de p para los cuales cada una de las siguientes integrales impropias es convergente.

(*a*) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

(*b*) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$

Ejercicio 16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

(*a*) $y' + 5y = e^{5x}$

(*b*) $y' - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

(*c*) $3y + \sin(2x) = y'$

(*d*) $e^x y' + 4e^x y = 1$

(*e*) $y'\cos x - y\sin x = \cos x$

(*f*) $xy' - ay = bx^4$, con a y $b \in \mathbb{R}$

Ejercicio 17. Un objeto de masa m cae desde un helicóptero. Suponiendo que la fuerza de resistencia debida al aire es proporcional a la velocidad del objeto (con constante de proporcionalidad k) se tiene que

$$v'(t) = g - cv(t)$$

donde $v(t)$ es la velocidad del objeto en función del tiempo, g es la aceleración de la gravedad y $c = k/m$

(*a*) Interpretar la ecuación diferencial anterior en términos físicos.

(*b*) Suponiendo que $v(0) = 0$, hallar $v(t)$.

(*c*) Demostrar que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = gm/k$.

(*d*) El límite del ítem anterior se llama velocidad terminal. Interpretar físicamente.

Ejercicio 18. En cierta región se observa que la velocidad de cambio del número de lobos $N(t)$ es directamente proporcional a $650 - N(t)$ donde t mide el tiempo en años. Cuando $t = 0$ la población es de 300 lobos y cuando $t = 2$ la población se incrementó a 500. Hallar la población al cabo de 3 años.

Ejercicio 19. La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había originalmente?

Ejercicio 20. La ley de enfriamiento de Newton establece que la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el ambiente que lo rodea. A las 10 hs se deja un objeto cuya temperatura es $100°C$ en una habitación cuya temperatura se mantiene constante a $20°C$. Pasados 10 minutos, la temperatura del objeto es de $90°C$. ¿Qué temperatura tendrá el objeto a las 13 hs? ¿A qué hora tendrá el objeto una temperatura de $50°C$?

Ejercicio 21. Un tanque contiene 1000 litros de agua pura. Una salmuera que contiene $0,05$kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 litros por minuto. Una otra salmuera que contiene $0,04$kg de sal por litro de agua entra a razón de 10 litros por minuto. La solución se mantiene perfectamente mezclada y sale del tanque a razón de 15 litros por minuto.

(a) Determine la cantidad de sal que queda en el tanque al cabo de t minutos.

(b) Determine la concentración de sal en el tanque al cabo de t minutos.

Ejercicio 22. Un depósito contiene 50 litros de una solución compuesta de 90 % de agua y 10 % de alcohol. Se vierte en el depósito una segunda solución que contiene 50 % de agua y 50 % de alcohol a razón de 4 litros por minuto. Al mismo tiempo se vacía el depósito a razón de 5 litros por minuto. Supongamos que la solución del depósito se agita constantemente. ¿Cuánto alcohol queda en el depósito después de 10 minutos?

Ejercicio 23. Se inyecta glucosa por vía intravenosa a razón de q unidades por minuto. El cuerpo elimina del flujo sanguíneo la glucosa a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Sea $Q(t)$ la cantidad de glucosa presente en la sangre en el instante t.

(a) Hallar la ecuación diferencial que describe el ritmo de cambio de la glucosa en sangre en función del tiempo.

(b) Resolver dicha ecuación diferencial para la condición inicial $Q(0) = Q_0$.

(c) Calcular $\lim_{t\to+\infty} Q(t)$.

Ejercicio 24. Un depósito de 200 litros está lleno hasta la mitad de agua destilada. Se comienza a verter en el depósito una solución de agua y sal de concentración 50g/l a un ritmo de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo se extrae la solución resultante (convenientemente agitada) a razón de 3 litros por minuto. En el instante en que se llene el depósito, ¿cuál será la concentración de sal en la solución?