Cálculo I

Año 2010

Práctica 9: Series

Ejercicio 1. Escribir el término general de las siguientes series y expresarlas con la notación de sumatoria.

(a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$

(b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\dots$

(c) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots$

(d) $3+\frac{6}{5}+\frac{12}{25}+\frac{24}{125}+\frac{48}{625}+\dots$

(e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots$

(f) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ln\left(\frac{4}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{6}\right)+\dots$

Calcular la suma de las series de los items (c), (d), (e) y (f).

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes series son convergentes. En caso de que lo sean, calcular su suma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{5^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10}{5^{n-1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Ejercicio 3. Sea $a>0$. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+2^n}{a^n}=\frac{35}{12}$, ¿cuánto vale a?

Ejercicio 4. A partir de la identidad $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ para $-1<x<1$, deducir las siguientes fórmulas.

(a) $1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+\dots=\frac{1}{1-x^2}$ para $-1<x<1$.

(b) $x+x^3+x^5+\dots+x^{2n+1}+\dots=\frac{x}{1-x^2}$ para $-1<x<1$.

(c) $1-x+x^2-x^3+x^4+\dots+(-1)^nx^n+\dots=\frac{1}{1+x}$ para $-1<x<1$.

(d) $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^n x^n + \ldots = \dfrac{1}{1-2x}$ para $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Ejercicio 5.

(a) A partir de que $0,999\ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$ demostrar que $0,999\ldots = 1$.

(b) Escribir el número decimal periódico $0,444\ldots$ como una serie. Hallar la suma de dicha serie y utilizar el resultado para escribir $0,444\ldots$ como cociente de números enteros.

(c) Repetir lo pedido en el item anterior para el número $0,1212\ldots$

Ejercicio 6. Decidir si cada una de las siguientes series es convergente o divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{4n^4+5n-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(\operatorname{sen} n)^3}{2^n+n^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n-\cos n}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Ejercicio 7. Utilizar el criterio de la raíz o el criterio del cociente para determinar si las siguientes series son convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n}{5^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 8. Analizar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+5n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

Ejercicio 9.

(a) Hallar todos los valores de $p > 0$ tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$ sea convergente.

(b) Hallar todos los valores de $p > 0$ tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ sea convergente.

Ejercicio 10. Analizar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes items, hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie dada sea convergente. Indique, además, para cuáles de esos valores la convergencia es absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{x^{2n}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2+2}\right) x^{2n+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

Ejercicio 12. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$

Ejercicio 13. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias. Indique, además, para qué valores de x la serie converge y para cuáles converge absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2n+1} (x-2)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} (2x+3)^n$

(*e*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}(2x+1)^n$

(*f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right) x^n$

(*g*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$

(*h*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) x^{2n+1}$

(*i*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$

(*j*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$

(*k*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} x^{4n+1}$

(*l*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n} x^n$

Ejercicio 14. Calcule el polinomio de Taylor de cada una de las siguientes funciones alrededor de x_0 y del orden indicado.

(*a*) $f(x) = e^x$, orden 4, $x_0 = 0$.

(*b*) $f(x) = e^{-x}$, orden 3, $x_0 = 0$.

(*c*) $f(x) = \cos(x)$, orden 4, $x_0 = 0$.

(*d*) $f(x) = \cos(x)$, orden 5, $x_0 = 0$.

(*e*) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, orden 5, $x_0 = 0$.

(*f*) $f(x) = \ln(x)$, orden 3, $x_0 = 1$.

(*g*) $f(x) = \ln(1+x)$, orden 4, $x_0 = 0$.

(*h*) $f(x) = \sqrt{x}$, orden 3, $x_0 = 1$.

Ejercicio 15. Utilizar el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ para aproximar el valor de $\operatorname{sen}(\frac{1}{4})$. Dar, además, una cota para el error cometido.

Ejercicio 16. Se quiere aproximar $e^{\frac{1}{3}}$ utilizando polinomios de Taylor de $f(x) = e^x$ centrados en $x_0 = 0$.

(*a*) Demostrar que si se utiliza el polinomio de Taylor de orden 5 el error cometido es menor a $\frac{1}{174960}$.

(*b*) ¿De qué orden hay que tomar el polinomio de Taylor para que el error que se cometa al usar dicho polinomio sea menor a 10^{-8}?

Ejercicio 17. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable.

(*a*) Demostrar que si f es impar entonces en polinomio de Taylor de orden n centrado en 0 tiene sólo potencias impares de x.

(*b*) Demostrar que si f es par entonces en polinomio de Taylor de orden n centrado en 0 tiene sólo potencias pares de x.

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Sea $P_k(x)$ el polinomio de Taylor de orden k de f centrado en 0.

(*a*) Dar una expresión para $P_k(x)$ y otra para el resto $R_{k+1}(x)$.

(*b*) Demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} R_{k+1}(1) = 0$.

(*c*) Concluir del item anterior que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

(*d*) Sea $z \in \mathbb{R}$ fijo. Demostrar que $\lim_{k\to\infty} R_{k+1}(z) = 0$.

(*e*) Concluir del item anterior que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 19. Siguiendo los pasos (*a*), (*d*) y (*e*) del ejercicio anterior demostrar que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

y que

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.