Introducción al Algebra Lineal

Año 2020 Practica 1:

Vectores geométricos del plano y del espacio

Ejercicio 1. Colocar V o F según corresponda, justificando la respuesta:

a) La suma de dos vectores fijos del plano, es otro vector fijo que siempre tiene el mismo sentido y dirección que los sumandos.

b) La suma de un vector fijo del plano IR^2 con su vector opuesto, es igual al vector nulo.

c) La multiplicación de un escalar no nulo, por un vector fijo del plano, es el vector nulo.

d) La multiplicación de un escalar por el vector nulo es un vector nulo del plano.

e) Dado un vector fijo del plano IR^2, su vector opuesto es único.

Resolución:

a) ***FALSO. Depende de los vectores que se estén sumando.***

b) ***VERDADERO. Sea*** $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$***, su opuesto es*** $-\boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{x}; -\boldsymbol{y})$ ***entonces:*** $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \big(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}); \boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{y})\big) = (\mathbf{0}; \mathbf{0}) = \vec{\mathbf{0}}$.

c) ***FALSO. Para obtener el vector nulo teniendo un escalar distinto de cero, es necesario que el vector sea el nulo.***

d) ***VERDADERO. Demostrado en teoría.***

e) ***VERDADERO. Sea*** $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ ***y*** $-\boldsymbol{u}$ ***su vector opuesto, entonces:*** $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \vec{\mathbf{0}}$.

Supongamos que existe un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ***tal que :*** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \vec{\mathbf{0}}$

Como: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \vec{\mathbf{0}}$

$(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{u}) + \vec{\mathbf{0}}$ ***(sumamos a izquierda*** $-\boldsymbol{u}$***)***

$[(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}] + \boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{u}) + \vec{\mathbf{0}}$ ***(por prop. asociativa de vectores)***

$\vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{u}) + \vec{\mathbf{0}}$ ***(por prop. de elemento neutro)***

$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}$

Por lo tanto, el vector opuesto para cada vector es único.

Ejercicio 2. Siendo los puntos $a = (3,-3)$, $b = (0,4)$, c = (-3,2) y d = (-3,0) de IR^2:

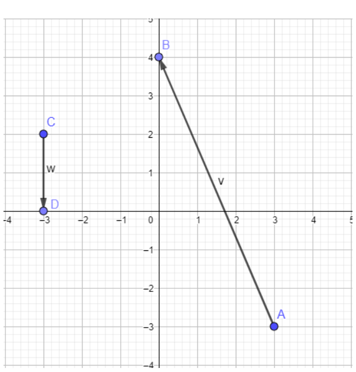
a) Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: $v = \overrightarrow{ab}$ $w = \overrightarrow{cd}$.

b) Determinar analíticamente las componentes del vector $\frac{2}{5}\vec{ab}$.

c) Determinar analíticamente las componentes del vector -3. $\vec{ab}$ + 4. $\vec{cd}$.

Resolución:

a)



Dados los puntos $p = (x_1; y_1)$ y $q = (x_2; y_2)$ en $\mathbb{R}^2$; el vector $u = \overrightarrow{pq} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

b) Primero calculamos al vector $\overrightarrow{ab}$, para ello usaremos la definición de vector entre dos puntos:

$\overrightarrow{ab} = (0 - 3; 4 - (-3)) = (-3; 7)$.

Ahora aplicando la definición de producto entre escalar y vector, tenemos que:

$\frac{2}{5}.\overrightarrow{ab} = \frac{2}{5}.(-3; 7) = \left(\frac{2}{5}.(-3); \frac{2}{5}.7\right) = \left(-\frac{6}{5}; \frac{14}{5}\right)$

c) Primero calculamos a los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$, para ello usaremos la definición de vector entre dos puntos:

$\overrightarrow{ab} = (-3; 7)$ y $\overrightarrow{cd} = (-3 - (-3); 0 - 2) = (0; -2)$.

Ahora aplicando las operaciones, tenemos que:

$-3.\overrightarrow{ab} + 4.\overrightarrow{cd} = -3.(-3; 7) + 4.(0; -2) = (-3.(-3); -3.7) + (4.0; 4.(-2)) = (9; -21) + (0; -8) = (9; -29)$.

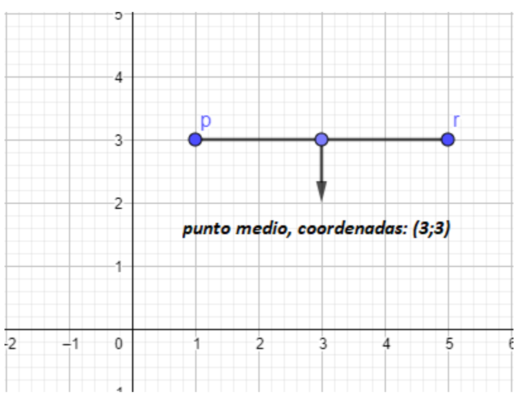
Ejercicio 3. Sean p = (1, 3), q = (1,-2), r= (5,3) y t= (5, -2) puntos de IR^2:

a) Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a los puntos p y r.

b) Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del rectángulo pqrt.

Resolución:

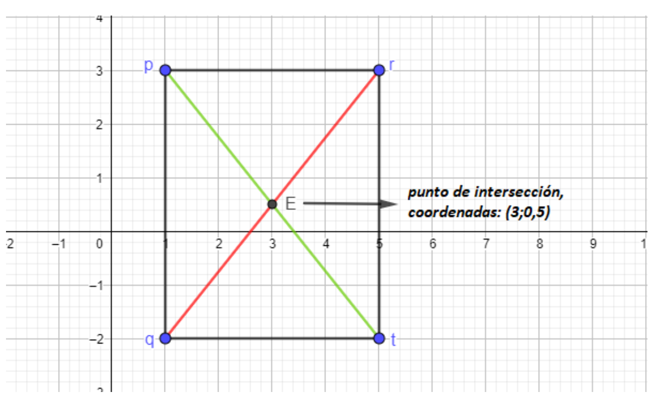
a) Vamos a resolverlo de manera gráfica y analítica:



Fórmula de punto medio: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Punto medio de p y r: $\left(\frac{1+5}{2}; \frac{3+3}{2}\right) = (3; 3)$.

b) También resolvemos de forma gráfica y analítica:



Por propiedad de los rectángulos, las diagonales se intersecan en su punto medio.

Punto medio entre p y t: $\left(\frac{1+5}{2}; \frac{3-2}{2}\right) = \left(3; \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 4. Siendo los puntos a = (4, 3,-3), b= (-5, 0, 4), c= (1,5,3) y d= (2,2,-1) de IR^3:

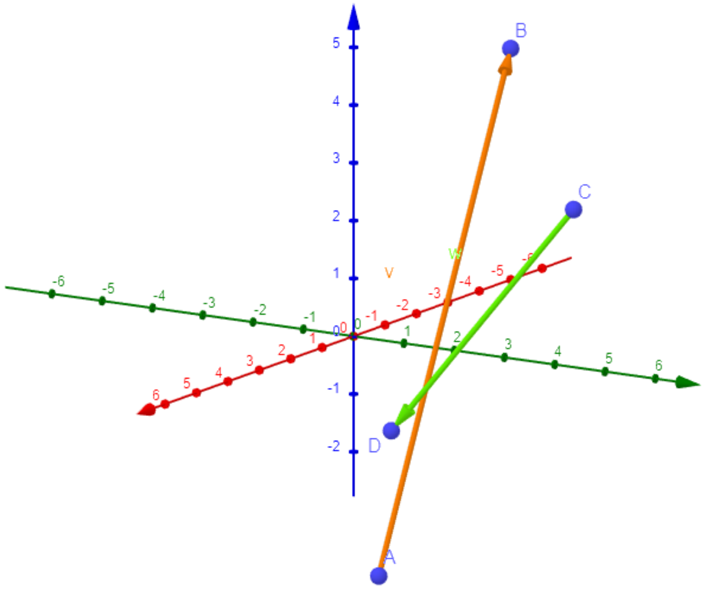
a) Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: $v = \overrightarrow{ab}$ y $w = \overrightarrow{cd}$

b) Determinar analíticamente las componentes del vector $7.\overrightarrow{cd}$.

c) Determinar analíticamente las componentes del vector $\frac{-4}{3}\overrightarrow{ab} + 5.\overrightarrow{cd}$.

Resolución:

a)



Dados los puntos $p = (x_1; y_1; z_1)$ ***y*** $q = (x_2; y_2; z_2)$ ***en*** $\mathbb{R}^3$***; el vector*** $u = \overrightarrow{pq} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

b) Primero calculamos al vector $\overrightarrow{cd}$***, para ello usaremos la definición de vector entre dos puntos:***

$\overrightarrow{cd} = (2 - 1; 2 - 5; -1 - 3) = (1; -3; -4)$.

Ahora aplicando la definición de producto entre escalar y vector, tenemos que:

$7.\overrightarrow{cd} = 7.(1; -3; -4) = (7.1; 7.(-3); 7.(-4)) = (7; -21; -28)$

c) Primero calculamos a los vectores $\overrightarrow{ab}$ ***y*** $\overrightarrow{cd}$***, para ello usaremos la definición de vector entre dos puntos:***

$\overrightarrow{ab} = \left(-5 - 4; 0 - 3; 4 - (-3)\right) = (-9; -3; 7)$ ***y*** $\overrightarrow{cd} = (1; -3; -4)$.

Ahora aplicando las operaciones, tenemos que:

$$-\frac{4}{3}.\overrightarrow{ab} + 5.\overrightarrow{cd} = -\frac{4}{3}.(-9; -3; 7) + 5.(1; -3; -4) = \left(-\frac{4}{3}.(-9); -\frac{4}{3}.(-3); -\frac{4}{3}.7\right) + \left(5.1; 5.(-3); 5.(-4)\right)$$

$$= \left(12; 4; -\frac{28}{3}\right) + (5; -15; -20) = \left(17; -11; -\frac{88}{3}\right)$$

Ejercicio 5. Sean p = (2,3, -2) y q = (7,–4,1) puntos de IR^3, encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a p y q.

Resolución:

Fórmula de punto medio: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Punto medio de p y q: $\left(\frac{2+7}{2}; \frac{3-4}{2}; \frac{-2+1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 6. Siendo u, v y w vectores de IR^2, demostrar que:

a) (u + v) + w = u + (v + w)
b) (u + v) = (v + u)
c) El vector nulo es único.

Resolución:

a) Como u, v y w son vectores de IR², podemos determinar que: $u = (u_1; u_2); v = (v_1; v_2)$ ***y*** $w = (w_1; w_2)$.

Tenemos que demostrar que: (u + v) + w = u + (v + w)

$[u + v] + w = [(u_1; u_2) + (v_1; v_2)] + (w_1; w_2)$

$= (u_1 + v_1; u_2 + v_2) + (w_1; w_2)$ ***(definición de suma de vectores sobre u y v)***

$= \left((u_1 + v_1) + w_1; (u_2 + v_2) + w_2\right)$ ***(definición de suma de vectores sobre u+v y w)***

$= \left(u_1 + (v_1 + w_1); u_2 + (v_2 + w_2)\right)$ ***(por asociativa de números reales)***

$= (u_1; u_2) + (v_1 + w_1; v_2 + w_2)$ ***(definición de suma de vectores sobre u y v+w)***

$= (u_1; u_2) + [(v_1; v_2) + (w_1; w_2)]$ *(definición de suma de vectores sobre v y w)*
$= u + [v + w].$

b) ***A cargo del alumno.***

c) ***Por definición el vector nulo es un vector*** $\vec{0}$ ***tal que*** $a + \vec{0} = \vec{0} + a = a$ ***para todo*** $a \in \mathbb{R}^2$.
Debemos demostrar que el vector nulo es único.
Supongamos que existe un $\vec{n}$ ***tal que también es vector nulo, es decir*** $a + \vec{n} = \vec{n} + a = a$ ***para todo*** $a \in \mathbb{R}^2$.
Como $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$, ***vale que*** $\vec{0} = \vec{0} + \vec{n} = \vec{n} + \vec{0}$.
Por otro lado $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$, ***entonces también vale que*** $\vec{n} = \vec{n} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{n}$.
Uniendo esta información tenemos que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{n} = \vec{n} + \vec{0} = \vec{n}$, ***entonces*** $\vec{0} = \vec{n}$ ***y por lo tanto el vector nulo es único.***

Ejercicio 7. Sean u = (3,2), v = (−1,5) y w = (2,2) vectores de IR^2, determinar las componentes de los vectores:

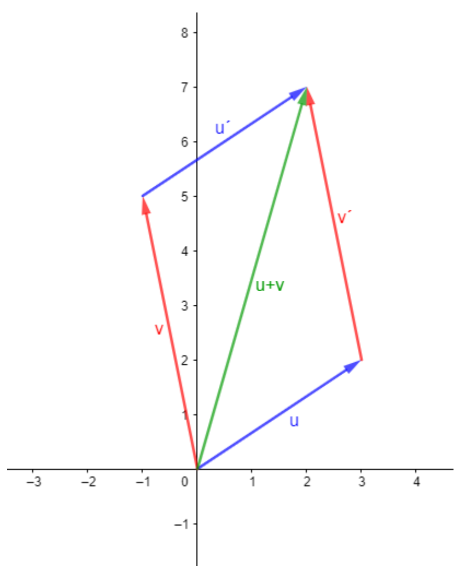
a) u + v
b) −2u + 2v
c) 3w + v
d) u+ v − w

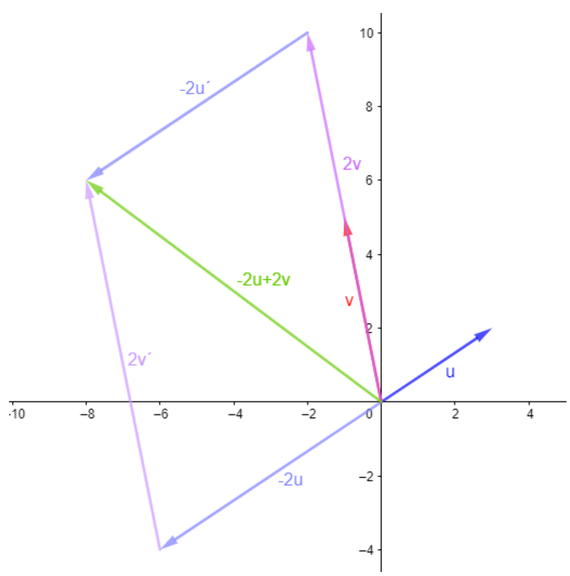
En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso los vectores y su resultante.

Resolución:

a) $u + v = (3,2) + (-1,5) = (3 + (-1), 2 + 5) = (2,7)$

b) $-2u + 2v = -2.(3,2) + 2.(-1,5) = (-2.3, -2.2) + (2.(-1), 2.5) = (-6,-4) + (-2,10) = (-6 + (-2), -4 + 10) = (-8,6).$





c) ***y*** ***d)*** ***A cargo del alumno***

Ejercicio 8. Siendo u, v vectores de IR^3 y t y k escalares reales, demostrar que:

a) t • (u + v) = t • u + t • v
b) (t+k) • u = t • u+ k • u
c) (t.k) • u = t.(k • u)
d) 1 • u = u

Resolución:

a) Como u y v son vectores de IR³, podemos definir: $\boldsymbol{u = (u_1; u_2; u_3)}$ ***y*** $\boldsymbol{v = (v_1; v_2; v_3)}$***. Tenemos que demostrar que:*** $\boldsymbol{t\,.\,[u+v] = t.u + t.v}$ ***para todo*** $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{t\,.\,[u+v] = t.\,[(u_1; u_2; u_3) + (v_1; v_2; v_3)]}$$

$$\boldsymbol{= t.\,(u_1+v_1; u_2+v_2; u_3+v_3)} \quad \textit{(definición de suma de vectores sobre u y v)}$$

$$\boldsymbol{= (t.\,(u_1+v_1); t.\,(u_2+v_2); t.\,(u_3+v_3))} \quad \textit{(definición de producto entre vector y escalar)}$$

$$\boldsymbol{= (t.u_1 + t.v_1; t.u_2 + t.v_2; t.u_3 + t.v_3)} \quad \textit{(por distributiva en los números reales)}$$

$$\boldsymbol{= (t.u_1; t.u_2; t.u_3) + (t.v_1; t.v_2; t.v_3)} \quad \textit{(definición de suma de vectores sobre tu y tv)}$$

$$\boldsymbol{= t.\,(u_1; u_2; u_3) + t.\,(v_1; v_2; v_3)} \quad \textit{(definición de producto entre vector y escalar)}$$

$$\boldsymbol{= t.u + t.v.}$$

b) A cargo del alumno.

c) Como u es vector de IR³, podemos definir: $\boldsymbol{u = (u_1; u_2; u_3)}$***.***
Tenemos que demostrar que: $\boldsymbol{[t.k].u = t.[k.u]}$ ***para todo*** $\boldsymbol{t, k} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{[t.k].u = (t.k).\,(u_1; u_2; u_3)}$$

$$\boldsymbol{= \big((t.k).u_1; (t.k).u_2; (t.k).u_3\big)} \quad \textit{(definición de producto entre vector y escalar)}$$

$$\boldsymbol{= (t.\,(k.u_1); t.\,(k.u_2); t.\,(k.u_3))} \quad \textit{(por asociativa en los números reales)}$$

$$\boldsymbol{= t.\,(k.u_1; k.u_2; k.u_3)} \quad \textit{(definición de producto entre vector y escalar)}$$

$$\boldsymbol{= t.\,[k.\,(u_1; u_2; u_3)]} \quad \textit{(definición de producto entre vector y escalar)}$$

$$\boldsymbol{= t.\,[k.u]}$$

$\boldsymbol{d)}$ ***A cargo del alumno.***

Ejercicio 9. Sean $u = (3,-2, 4)$, $v = (6,-1,5)$ y $w = (0,2,3)$ vectores de IR³, determinar analíticamente las componentes de los vectores:

a) u + v
b) −4u + 2v
c) u+3w + v
d) v – w

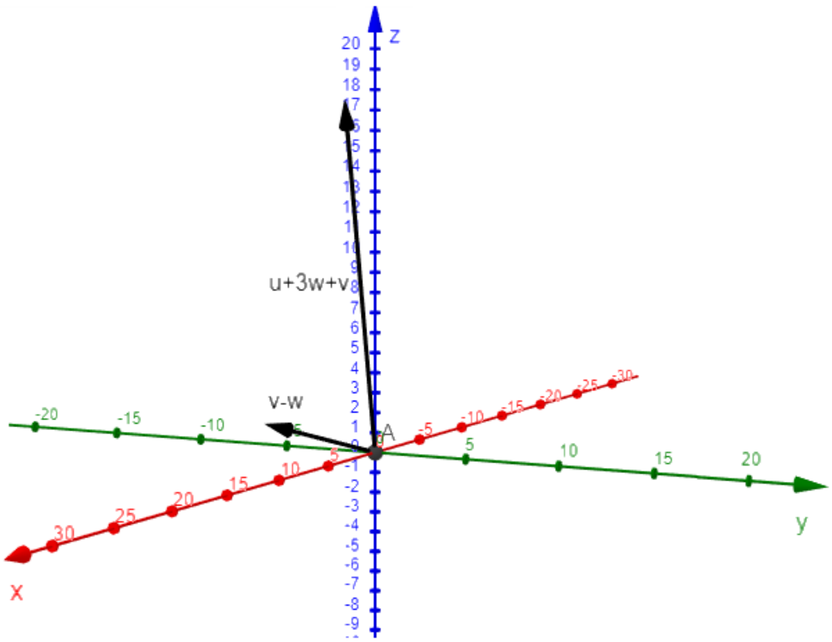
En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso sus resultantes.

Resolución:

a) y b) A cardo del alumno.

$\boldsymbol{c)\ u + 3w + v = (3,-2,4) + 3.\,(0,2,3) + (6,-1,5) = (3+3.0+6, -2+3.2-1, 4+3.3+5) = (9,3,18)}$

$\boldsymbol{d)\ v - w = (6,-1,5) - (0,2,3) = (6-0, -1-2, 5-3) = (6,-3,2)}$



Ejercicio 10. Determinar los valores de x e y de IR, que verifican: x (1,2) + y (0,3) = (4, -3).

Resolución:
Como x e y son números reales, comenzamos realizando las operaciones que se encuentran a la izquierda del signo igual:
$\boldsymbol{x.(1,2)+y.(0,3)=(x.1,x.2)+(y.0,y.3)=(x,2x)+(0,3y)=(x+0,2x+3y)=(x,2x+3y)}$
Por lo que: $\boldsymbol{(x,2x+3y)=(4,-3)}$ ***; comparando componente a componente tenemos que:***
$\boldsymbol{x=4}$***, por lo tanto:*** $\boldsymbol{2x+3y=2.4+3y=8+3y=-3}$ ***y entonces*** $\boldsymbol{y=-\frac{11}{3}}$***.***
Conclusión: $\boldsymbol{x=4 \quad y=-\frac{11}{3}}$***.***
Verificación: $\boldsymbol{4.(1,2)-\frac{11}{3}.(0,3)=(4,8)-(0,11)=(4,-3)}$***.***

Ejercicio 11. Probar que no existen los escalares c_1, c_2 y c_3 tales que:

c_1 (1,2,-3) + c_2 (5,7,1) + c_3 (6,9,-2) = (4 ,5, 0).

Resolución:
Como $\boldsymbol{c_1,c_2,c_3}$ ***son números reales, comenzamos realizando las operaciones que se encuentran a la izquierda del signo igual:***

$$\boldsymbol{c_1.(1,2,-3)+\ c_2.(5,7,1)+\ c_3(6,9,-2)=(c_1,2c_1,-3c_1)+(5c_2,7c_2,c_2)+(6c_3,9c_3,-2c_3)}$$
$$\boldsymbol{=(c_1+5c_2+6c_3,2c_1+7c_2+9c_3,-3c_1+c_2-2c_3)}$$

Por lo que: $\boldsymbol{(c_1+5c_2+6c_3,2c_1+7c_2+9c_3,-3c_1+c_2-2c_3)=(4,5,0)}$***, comparando componente a componente, obtenemos un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas:***

$$\boldsymbol{\begin{cases} c_1+5c_2+6c_3=4 \\ 2c_1+7c_2+9c_3=5 \\ -3c_1+c_2-2c_3=0 \end{cases}}$$ ***Resolveremos este sistema por sustitución.***

Vamos a comenzar despejando a $\boldsymbol{c_1}$ ***de la primera ecuación:*** $\boldsymbol{c_1=4-5c_2-6c_3}$
Reemplazaremos a $\boldsymbol{c_1}$ ***en la segunda ecuación:***

$$\boldsymbol{\begin{aligned} 2c_1+7c_2+9c_3&=5 \\ 2(4-5c_2-6c_3\ )+7c_2+9c_3&=5 \\ 8-10c_2-12c_3+7c_2+9c_3&=5 \\ 8-3c_2-3c_3&=5 \end{aligned}}$$

Despejamos a c_2 de esta ecuación: $c_2 = \frac{5-8+3c_3}{-3} = \frac{-3+3c_3}{-3} = 1 - c_3$
Entonces $c_1 = 4 - 5c_2 - 6c_3 = 4 - 5(1 - c_3) - 6c_3 = 4 - 5 + 5c_3 - 6c_3 = -1 - c_3$.
Por último sustituimos c_1 y c_2 en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} -3c_1 + c_2 - 2c_3 &= 0 \\ -3(-1 - c_3) + (1 - c_3) - 2c_3 &= 0 \\ 3 + 3c_3 + 1 - c_3 - 2c_3 &= 0 \\ 4 + 3c_3 - 3c_3 &= 0 \\ 4 &= 0 \rightarrow \textit{Absurdo!} \end{aligned}$$

Estamos ante un Sistema Incompatible, por lo tanto c_1, c_2, c_3 no existen.

Ejercicio 12. Determinar en cada caso, si el vector w es una combinación lineal de los vectores de la familia F:

a) F = $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ y w = $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) F = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y w = $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución:
a) A cargo del alumno.
b) Queremos determinar si el vector w es combinación lineal de los vectores de F, es decir, queremos saber si existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que:

$$c_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a comenzar realizando las operaciones correspondientes en el lado izquierdo de la igualdad:

$$c_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_3 \\ 2c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + 3c_3 \\ 2c_3 \\ c_1 - c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $\begin{pmatrix} c_1 - c_2 + 3c_3 \\ 2c_3 \\ c_1 - c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***comparando componente a componente tenemos que:***

$$c_1 - c_2 + 3c_3 = -3 \quad ; \quad 2c_3 = 5 \quad ; \quad c_1 - c_2 + c_3 = 0$$

Entonces: $c_3 = {}^{5}/_{2}$.
Reemplazando este valor en las otras ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 3c_3 &= -3 \\ c_1 - c_2 + 3.\frac{5}{2} &= -3 \\ c_1 - c_2 + \frac{15}{2} &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 + \frac{5}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, así que resolvemos el sistema de ecuaciones por sustitución.
Despejamos c_1 de la primera ecuación: $c_1 - c_2 + \frac{15}{2} = -3$

$$\begin{aligned} c_1 &= -3 + c_2 - \frac{15}{2} \\ c_1 &= c_2 - \frac{21}{2} \end{aligned}$$

Sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + \frac{5}{2} &= 0 \\ \left(c_2 - \frac{21}{2}\right) - c_2 + \frac{5}{2} &= 0 \\ c_2 - c_2 &= \frac{21}{2} - \frac{5}{2} \\ 0 &= 8 \rightarrow \textit{Absurdo!} \end{aligned}$$

Estamos ante un Sistema Incompatible, es decir, el sistema no tiene solución.
Esto quiere decir que no existen c_1, c_2, c_3 tales que:

$$c_1.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2.\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3.\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$$

Y por lo tanto w no es Combinación Lineal de los vectores de F.

Ejercicio 13. Determinar si las siguientes familias de vectores son libres o ligadas:

a) En IR^2 (IR): F = {(2,3), (3,0), (4, 7)}
b) En IR^2 (IR): F = {(1,0), (-2,0)}
c) En IR^2 (IR): F = {(2,3), (0,0)}
d) En IR^2 (IR): F = {(1,3), (-4,0)}
e) En IR^3 (IR): F= {(4,-1,0), (3,-1,0), (2,0,3)}

Resolución:

Sabemos que una familia $F=\{u_1;u_2;\dots;u_n\}$ es libre cuando en la combinación trivial: $k_1.u_1+k_2.u_2+\cdots+k_n.u_n=\vec{0}$, la única manera de obtener al vector nulo es que: $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

a) Sea $F=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\right\}$, lo primero que hacemos es plantear la combinación trivial:

$k_1.\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ aplicando las operaciones entre vectores en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que: $\begin{pmatrix}2k_1+3k_2+4k_3\\3k_1+7k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y por igualdad de vectores obtenemos:

$\begin{cases}2k_1+3k_2+4k_3=0\\3k_1+7k_3=0\end{cases}$ queda planteado un sistema de ecuaciones que resolvemos por sustitución.

Despejamos a k_3 de la segunda ecuación: $k_3=-\frac{3}{7}k_1$.

Reemplazamos en la primer ecuación:

$$2k_1+3k_2+4k_3=0$$
$$2k_1+3k_2+4\left(-\frac{3}{7}k_1\right)=0$$
$$2k_1+3k_2-\frac{12}{7}k_3=0$$
$$\frac{2}{7}k_1+3k_2=0$$

Ahora despejamos a k_2 de esta ecuación: $k_2=\left(-\frac{2}{7}k_1\right):3=-\frac{2}{21}k_1$.

Por lo tanto, hemos obtenido que: $k_3=-\frac{3}{7}k_1$ y $k_2=-\frac{2}{21}k_1$ mientras que k_1 puede ser cualquier número real.

Por lo tanto la familia no es libre, es decir, $F=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\right\}$ es ligada.

b) A cargo del alumno

c) A cargo del alumno

d) A cargo del alumno

e) Sea $F=\left\{\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$, lo primero que hacemos es plantear la combinación trivial:

$k_1.\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ aplicando las operaciones entre vectores en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que: $\begin{pmatrix}4k_1+3k_2+2k_3\\-k_1-k_2\\3k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y por igualdad de vectores obtenemos:

$\begin{cases}4k_1+3k_2+2k_3=0\\-k_1-k_2=0\\3k_3=0\end{cases}$ queda planteado un sistema de ecuaciones que resolvemos por sustitución.

Por la tercera ecuación sabemos que: $k_3=0$, además de la segunda ecuación obtenemos que: $k_2=-k_1$.

Reemplazando esta información en la primera ecuación, tenemos:

$$4k_1+3k_2+2k_3=0$$
$$4k_1+3(-k_1)+2.0=0$$

$$4k_1 - 3k_1 = 0$$
$$k_1 = 0$$
Y por lo tanto $k_2 = 0$.

Como hemos obtenido que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$***, entonces*** $= \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ***es una familia libre.***

Ejercicio 14. Colocar V o F según corresponda:

a) Una familia ligada posee todos sus vectores linealmente independientes.

b) Si el vector nulo pertenece a una familia de vectores, entonces es una familia ligada.

c) Dada una familia de vectores linealmente independientes, entonces se puede afirmar que todos se pueden expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia.

Resolución:

a) FALSO. Por definición, una familia ligada está formada por vectores linealmente dependientes.

b) VERDADERO. Debido a que el escalar que acompaña al vector nulo en la combinación trivial, puede ser cualquier número real y la familia va a resultar ligada.

c) FALSO. Demostraremos esto por el Absurdo.
Supongamos que tenemos a la familia $F = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$***, si todos se pueden expresar como CL de los demás vectores de la familia, entonces podemos afirmar que*** u_n ***es CL de*** $u_1; u_2; \dots; u_{n-1}$.
Esto quiere decir que existen escalares $c_1; c_2; \dots; c_{n-1}$***, no todos ceros, tales que:***
$$c_1.u_1 + c_2.u_2 + \cdots + c_{n-1}.u_{n-1} = u_n$$
Igualando a cero, obtenemos: $c_1.u_1 + c_2.u_2 + \cdots + c_{n-1}.u_{n-1} - u_n = \vec{0}$***, la cual es la combinación trivial, en donde los escalares no son todos cero y por lo tanto la familia*** $F = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ ***sería ligada y los vectores de ella serían linealmente dependientes. ABSURDO! Ya que sabemos que los vectores son linealmente independientes.***
El absurdo se produjo al suponer todos los vectores se pueden expresar como CL de los demás vectores de la familia.

Ejercicio 15. Sean los vectores u = (-2, 3) y v = (-3,5) de IR^2, verificar que:

a) II u II ≥ 0
b) II -5. u II = II -5 II . II u II
c) II u + v II ≤ II u II + II v II

Resolución:

La expresión $\|u\|$ ***significa "la norma de*** u***", la cual se encuentra mediante la fórmula:*** $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.

a) $\|u\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \geq 0$

b) $\|-5.u\| = \left\| -5.\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10^2 + (-15)^2} = \sqrt{100+225} = \sqrt{325}$

Por otro lado: $|-5|.\|u\| = |-5|.\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 5.\sqrt{13} = \sqrt{5^2.13} = \sqrt{325}$ ***entonces:*** $\|-5.u\| = |-5|.\|u\|$

c) $\|u+v\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$

Por otro lado: $\|u\| + \|v\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{13} + \sqrt{34}$ ***podemos ver que:*** $\sqrt{89} \leq \sqrt{13} + \sqrt{34}$.

Ejercicio 16. Sea u = (1, k, 0) un vector de IR^3. Hallar todos los valores de k reales, tal que II u II = 2.

Resolución:

Como sabemos que $\|u\| = 2$***, entonces tenemos que*** $\sqrt{1^2 + k^2 + 0^2} = \sqrt{1+k^2} = 2$***. Entonces:***
$$\sqrt{1+k^2} = 2$$

$$\left(\sqrt{1+k^2}\right)^2 = 2^2$$
$$1+k^2 = 4$$
$$k^2 = 4-1$$
$$k^2 = 3$$
$$\sqrt{k^2} = \sqrt{3}$$
$$|k| = \sqrt{3} \textit{ por lo tanto } k_1 = \sqrt{3} \text{ y } k_2 = -\sqrt{3}$$

Verificación: Si $u = \left(1, \sqrt{3}, 0\right)$ ***entonces*** $\|u\| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1+3} = 2$; ***y si*** $u = \left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$ ***entonces*** $\|u\| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

Ejercicio 17. Sean u = (1, 2, -3) , v = (1,1,0) y w = (2,2,1) vectores de IR^3, hallar:

a) II u + v II b) II 3.u II + II w II c) II -2. u II + 2. II u II

Resolución:

a) $\|u+v\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

b) $\|3u\| + \|w\| = \left\|3\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{126} + \sqrt{9} = \sqrt{126} + 3 = 3\sqrt{14} + 3$

c) $\|-2u\| + 2\|u\| = \left\|-2\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\| + 2\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}\right\| + 2\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+16+36} + 2\sqrt{1+4+9} =$
$= \sqrt{56} + 2.\sqrt{14} = 2\sqrt{14} + 2\sqrt{14} = 4\sqrt{14}.$

Ejercicio 18. Normalizar el vector $u = \overrightarrow{ab}$ en los siguientes casos:

a) a= (1,-2) y b= (-2,1) de IR^2.
b) a= (1,0,2) y b= (2,-4,5) de IR^3.

Resolución:
Para normalizar un vector u ***, tenemos que usar la fórmula:*** $v = \frac{1}{\|u\|} u$.

a) $u = \overrightarrow{ab} = \left(-2-1; 1-(-2)\right) = (-3;3)$ ***entonces:*** $v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{9+9}}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-{}^{3}/_{\sqrt{18}}\\ {}^{3}/_{\sqrt{18}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-{}^{\sqrt{2}}/_{2}\\ {}^{\sqrt{2}}/_{2}\end{pmatrix}$

b) $u = \overrightarrow{ab} = (2-1; -4-0; 5-2) = (1;-4;3)$ ***entonces:*** $v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{1+16+9}}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix}{}^{1}/_{\sqrt{26}}\\ -{}^{4}/_{\sqrt{26}}\\ {}^{3}/_{\sqrt{26}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{}^{\sqrt{26}}/_{26}\\ {}^{2\sqrt{26}}/_{13}\\ {}^{3\sqrt{26}}/_{26}\end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Hallar el producto escalar u • v para los vectores:

a) u = (-2, 5) y v= (9, -3) de IR^2.
b) u= (0, 3, 2) y v = (8, 0, 6) de IR^3.

Resolución:

Por definición, el producto punto o escalar, entre dos vectores u y v se calcula:

- ***Si $u, v \in \mathbb{R}^2; u = (x_1; y_1)$ y $v = (x_2; y_2)$ entonces: $u.v = x_1.x_2 + y_1.y_2$***
- ***Si $u, v \in \mathbb{R}^3; u = (x_1; y_1; z_1)$ y $v = (x_2; y_2; z_2)$ entonces: $u.v = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$***

a) $u.v = -2.9 + 5.(-3) = -18 - 15 = -33$

b) $u.v = 0.8 + 3.0 + 2.6 = 0 + 0 + 12 = 12$

Ejercicio 20. Siendo los vectores u = (3, -2, 9), v = (4, -1, 3) y w= (0, 3, 5) de IR^3, encontrar si es posible:

a) u • (v • w)   b) u • (v + w)   c) (u • v) w   d) II (v • w) II   e) II 4(v + w) • u II

Resolución:

a) No es posible, pues $(v.w)$ es un número real, por lo que calcular $u.(v.w)$ no se puede ya que el producto punto es entre vectores.

b) Si es posible: $u\,.(v+w) = \begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}.\left[\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} = 3.4 - 2.2 + 9.8 = 80.$

c) Si es posible, pues las operaciones están bien definidas: $(u.v)\,w = \left[\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} = [3.4 + 2.1 + 9.3]\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} = 41\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\123\\205\end{pmatrix}$

d) Si es posible, pues la norma de un número real es lo mismo que su valor absoluto: $\|v.w\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}\right\| = \|0 - 3 + 15\| = \|12\| = |12| = 12.$

e) Si es posible, pues la operación dentro de la norma da por resultado un número real y la norma de un número real es lo mismo que su valor absoluto: $\|4(v+w).u\| = \left\|4\left[\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}\right\| = \left\|4\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}16\\8\\32\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}\right\| = \|48 - 16 + 288\| = \|320\| = |320| = 320.$

Ejercicio 21. Encontrar todos los vectores:

a) u = (x, y) de IR^2 ortogonales a v = (-2, 3).
b) u = (x, y, z) de IR^3 ortogonales a v = (1,-1,-1) y w = (0, 1,-1).

Resolución:

Dos vectores son ortogonales cuando el producto punto entre ellos es cero, decir: $u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0.$

a) Para encontrar los vectores ortogonales a v debemos plantear la ecuación: $u.v = 0$ y encontrar todos los vectores u que cumplan esa condición.

$$u.v = 0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = 0$$

$-2x + 3y = 0 \;\;\rightarrow$ ***Existen infinitos vectores u que cumplan con la ecuación.***

Vamos a encontrar la forma genérica de los mismos:

Despejar la variable "y" de la ecuación: $y = \frac{2}{3}x$

Por lo tanto los vectores que son ortogonales a v tienen la estructura: $u = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$.

<u>NOTA:</u> Todo vector que se encuentre sobre la recta $y = \frac{2}{3}x$ va a ser ortogonal a v.

b) En este caso como queremos todos los vectores que sean ortogonales a v y w debemos plantear dos ecuaciones: $u.v = 0$ y $u.w = 0$ donde los vectores u a encontrar, deben satisfacer ambas ecuaciones a la vez:

$$u.v = 0 \qquad\qquad u.w = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x - y - z = 0 \qquad\qquad y - z = 0$$

Como los vectores u deben satisfacer ambas ecuaciones a la vez, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por sustitución:
Despejamos a la variable "y" de la segunda ecuación: $y = z$
Reemplazamos a esa variable en la primera ecuación:

$$x - y - z = 0$$
$$x - z - z = 0$$
$$x - 2z = 0$$

Despejamos la variable "x" de esta ecuación: $x = 2z$.

Hemos obtenido que: : $x = 2z$, $y = z$ donde z puede ser cualquier número real.

Por lo tanto los vectores que son ortogonales a v y w tienen la estructura: $u = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ con $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 22. Demostrar que:

- **a)** IIu-vII^2 + IIu+vII^2 = 2 (IIuII^2 + IIvII^2), siendo u y v vectores.
- **b)** Si u y v son vectores ortogonales entonces II u+v II^2 = IIuII^2 + IIvII^2
- **c)** Dos vectores u, v son ortogonales si y sólo si II u+v II = II u- v II

Resolución:

Por propiedad sabemos que para cualquier vector vale que: $\|u\|^2 = u\,.\,u$.

a) Debemos demostrar que $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ para cualquier par de vectores u y v.

$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = (u - v).(u - v) + (u + v).(u + v)$ ***(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)***

$= (u - v).u - (u - v).v + (u + v).u + (u + v).v$ ***(prop. distributiva del prod. punto)***

$= u.u - v.u - u.v + v.v + u.u + v.u + u.v + v.v$ ***(prop. distributiva del prod. punto)***

$= u.u + v.v + u.u + v.v - v.u + v.u - u.v + u.v$ ***(prop. conmutativa de los reales)***

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2$ ***(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)***

$= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ ***(def. de producto en los reales)***

b) Debemos demostrar que si u y v son vectores ortogonales entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
Dos vectores son ortogonales cuando el producto punto entre ellos es cero, decir: $u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$, además por propiedad sabemos que $\|u\|^2 = u\,.\,u$.

$\|u + v\|^2 = (u + v).(u + v)$ ***(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)***

$= (u + v).u + (u + v).v$ ***(prop. distributiva del prod. punto)***

$= u.u + v.u + u.v + v.v$ ***(prop. distributiva del prod. punto)***

$= \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2$ *($u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$)*

$= \|u\|^2 + \|v\|^2$ *(prop. elemento neutro en los reales)*

c) ***Debemos demostrar que dos vectores u y v son ortogonales si y solo si $\|u+v\| = \|u-v\|$.***

<u>Primera parte ($\Rightarrow$):</u> Debemos probar que si u y v son ortogonales entonces $\|u+v\| = \|u-v\|$.

Dos vectores son ortogonales cuando el producto punto entre ellos es cero, decir: $u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$, además por propiedad sabemos que $\|u\|^2 = u\,.\,u$.

$\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v)$ *(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)*

$= (u+v).u + (u+v).v$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$= u.u + v.u + u.v + v.v$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$= \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2$ *($u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$)*

$= u.u - v.u - u.v + v.v$ *($u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0$)*

$= (u-v).u - (u-v).v$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$= (u-v).(u-v)$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$= \|u-v\|^2$ *(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)*

<u>Segunda parte ($\Leftarrow$):</u> Debemos probar que si $\|u+v\| = \|u-v\|$ entonces u y v son ortogonales.

Sabemos que: $\|u+v\| = \|u-v\|$

$(u+v).(u+v) = (u-v).(u-v)$ *(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)*

$(u+v).u + (u+v).v = (u-v).u - (u-v).v$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$u.u + v.u + u.v + v.v = u.u - v.u - u.v + v.v$ *(prop. distributiva del prod. punto)*

$\|u\|^2 + v.u + u.v + \|v\|^2 = \|u\|^2 - v.u - u.v + \|v\|^2$ *(prop. del prod. punto $\|u\|^2 = u\,.\,u$)*

$v.u + u.v = -v.u - u.v$ *(suma del opuesto de $\|u\|^2$ y $\|v\|^2$ a ambos miembros)*

$u.v + u.v + u.v + u.v = 0$ *(suma del opuesto de $-v.u$ y $-u.v$ a ambos miembros y conmutativa)*

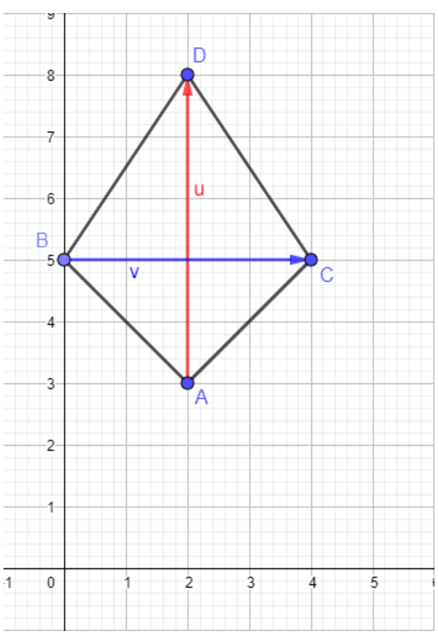
$4(u.v) = 0 \Leftrightarrow u.v = 0$ *(def. de producto en los reales)*

Por lo tanto u y v son ortogonales.

Ejercicio 23. Comprobar que las diagonales del romboide abdc, son perpendiculares, siendo a = (2, 3), b = (0,5), c = (4,5) y d = (2,8) puntos de IR^2

Resolución:

Dibujamos en el plano los puntos que nos han dado:



Podemos ver que las diagonales son: $u = \overrightarrow{ad}$ y $v = \overrightarrow{bc}$.

Queremos probar que estas diagonales son perpendiculares, es decir, que los vectores u y v son ortogonales, por lo que tenemos que verificar si se cumple la ecuación: $u.v = 0$.

$$\overrightarrow{ad} = (2-2; 8-3) = (0;5)$$

$$\overrightarrow{bc} = (4-0; 5-5) = (4;0)$$

Por lo tanto: $u.v = \binom{0}{5}.\binom{4}{0} = 0.4 + 5.0 = 0.$

Entonces las diagonales del romboide abdc son perpendiculares.

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes casos hallar el ángulo que forman los vectores u y v:

a) u = (1,1), v = (−1,0) de IR^2

b) u = (1,2), v= (−2,1) de IR^2

c) u = (2,1,1), v = (1,−1,2) de IR^3

Resolución:

Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^n$, distintos del vector nulo, definimos el ángulo determinado por u y v, como el único ángulo ϕ obtenido: $\phi = arccos\left(\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}\right)$.

a) $u.v = \binom{1}{1}.\binom{-1}{0} = -1 + 0 = -1 \qquad \|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$

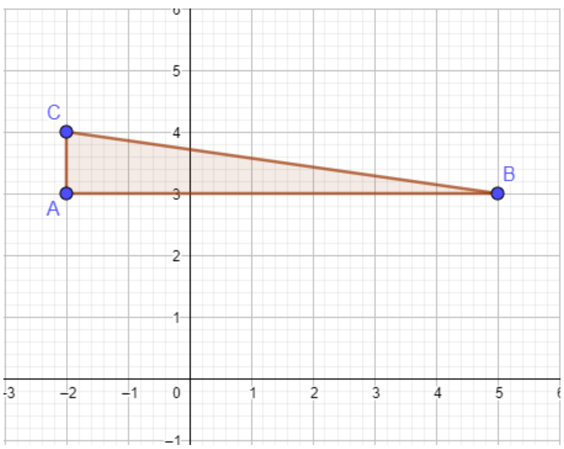
$\phi = arccos\left(\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}\right) = arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}.1}\right) = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135° \ \left(\frac{3}{4}\pi\right)$

b) ***A cargo del alumno***

c) ***A cargo del alumno***

Ejercicio 25. Determinar si el triángulo abc es acutángulo en el vértice b, siendo a = (-2, 3), b = (5, 3) y c = (-2, 4).

Resolución:



Que triángulo sea acutángulo en el vértice B significa que el ángulo $\widehat{ABC}$ es agudo.

Se debe buscar el ángulo $\widehat{ABC}$ determinado por los vectores $\overrightarrow{ba}$ y $\overrightarrow{bc}$.

$\overrightarrow{ba} = (-2-5; 3-3) = (-7; 0)$ ***y*** $\left\|\overrightarrow{ba}\right\| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$

$\overrightarrow{bc} = (-2-5; 4-3) = (-7; 1)$ ***y*** $\left\|\overrightarrow{bc}\right\| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

Si $\widehat{ABC} = \phi;\ \overrightarrow{ba} = u$ ***y*** $\overrightarrow{bc} = v$ ***entonces:***

$\phi = arccos\left(\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}\right) = arccos\left(\frac{49+0}{7.\sqrt{50}}\right) = arccos\left(\frac{49}{7\sqrt{50}}\right) \cong 8,13°$

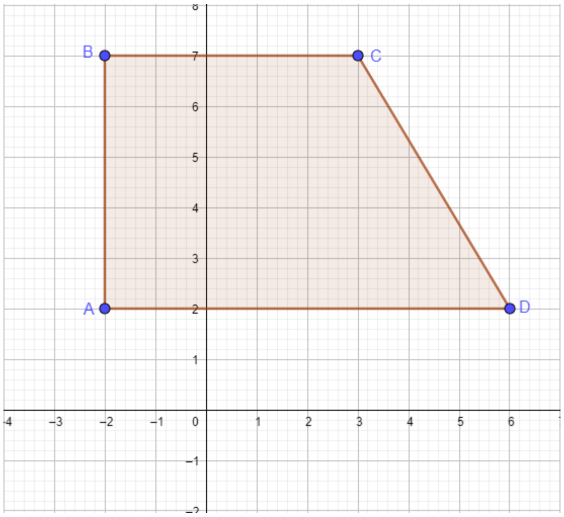
El triángulo es acutángulo en el vértice B.

Ejercicio 26. Determinar la longitud de los lados de un cuadrilátero abcd si se sabe que: a = (-2, 2), b = (-2, 7), c = (3, 7) y d = (6, 2) de IR^2.

a) ¿Es abcd un rectángulo? Justificar analíticamente tu respuesta.

b) Calcular su área y la longitud de las diagonales.

Resolución:



Lados del cuadrilátero:

$\vec{ab} = (-2+2;7-2) = (0;5)$ $\quad \|\vec{ab}\| = \sqrt{0^2+5^2} = 5$

$\vec{bc} = (3+2;7-7) = (5;0)$ $\quad \|\vec{bc}\| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$

$\vec{dc} = (3-6;7-2) = (-3;5)$ $\quad \|\vec{dc}\| = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{34}$

$\vec{da} = (-2-6;2-2) = (-8;0)$ $\quad \|\vec{da}\| = \sqrt{(-8)^2+0^2} = 8$

a) ***No es un rectángulo, pues en primer lugar, esta figura, no posee dos pares de lados opuestos de igual longitud ya que*** $\|\vec{ab}\| \neq \|\vec{dc}\|$ ***y*** $\|\vec{bc}\| \neq \|\vec{da}\|$***, además no todos sus ángulos son rectos:***

$\widehat{ADC} = \phi = arccos\left(\frac{\vec{da}.\vec{dc}}{\|\vec{da}\|.\|\vec{dc}\|}\right) = arccos\left(\frac{24+0}{8.\sqrt{34}}\right) = arccos\left(\frac{24}{8\sqrt{34}}\right) \cong 59,04°$

b) ***Área trapecio rectángulo:*** $\frac{(B+b).h}{2} \rightarrow A = \frac{(\|\vec{da}\|+\|\vec{bc}\|)x\|\vec{ab}\|}{2} = \frac{(8+5).5}{2} = 32,5\ un^2$

Diagonales:

$\vec{ac} = (3+2;7-2) = (5;5)$ $\quad \|\vec{ac}\| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$

$\vec{bd} = (6+2;2-7) = (8;-5)$ $\quad \|\vec{bd}\| = \sqrt{8^2+(-5)^2} = \sqrt{89}$

Ejercicio 27. Sean los vectores u = (1,2,2), v = (−1,1,2) y w = (−2,2,−1) de IR^3. Calcular:

a) u × w c) (u × v) × (-4)w

b) 3v × w d) II 2w x u II

Resolución:

Sean los vectores: $u = (u_1;u_2;u_3)$ ***y*** $v = (v_1;v_2;v_3)$***;*** $uxv = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$***.***

a) $uxw = (2.(-1) - 2.2; 2.(-2) - 1.(-1); 1.2 - 2.(-2)) = (-2-4; -4+1; 2+4) = (-6;-3;6)$

b) ***A cargo del alumno***

c) ***A cargo del alumno***

d) $2w = (-4;4;-2)$ ***por lo que:*** $2wxu = (4.2 - 2.(-2); (-2).1 - (-4).2; (-4).2 - 4.1) = (8+4; -2+8; -8-4) = (12;6;-12)$ ***entonces*** $\|2wxu\| = \sqrt{12^2+6^2+(-12)^2} = 18.$

Ejercicio 28. Siendo u, v y w vectores de IR^3, demostrar que:

a) u x v = - (vxu)

b) ux(v+w) = (uxv) + (uxw)

c) k (uxv) = (ku) x v = u x (kv)

d) ux $\vec{0}$ = $\vec{0}$ x u = 0

e) uxu = 0

Resolución:

a) ***Debemos demostrar que*** $uxv = -(vxu)$***.***

Sean $u = (u_1;u_2;u_3)$ ***y*** $v = (v_1;v_2;v_3)$***. Sabemos que*** $uxv = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$ ***mientras que*** $vxu = (v_2u_3 - v_3u_2; v_3u_1 - v_1u_3; v_1u_2 - v_2u_1)$ ***entonces:***

$-(vxu) = \left(-(v_2u_3 - v_3u_2); -(v_3u_1 - v_1u_3); -(v_1u_2 - v_2u_1)\right)$ ***(definición de vectores opuestos)***

$= (-v_2u_3 + v_3u_2; -v_3u_1 + v_1u_3; -v_1u_2 + v_2u_1)$ *(distributiva de los números reales)*
$= (v_3u_2 - v_2u_3;\ v_1u_3 - v_3u_1; v_2u_1 - v_1u_2)$ *(conmutativa de los números reales)*
$= (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$ *(conmutativa de los números reales)*
$= uxv$

b) ***Debemos demostrar que*** $ux(v+w) = (uxv) + (uxw)$.
Sean $u = (u_1; u_2; u_3)$***;*** $v = (v_1; v_2; v_3)$ ***y*** $w = (w_1; w_2; w_3)$.
Sabemos que $v + w = (v_1 + w_1; v_2 + w_2; v_3 + w_3)$***, por lo que:***
$ux(v+w) = \big(u_2(v_3+w_3) - u_3(v_2+w_2); u_3(v_1+w_1) - u_1(v_3+w_3); u_1(v_2+w_2) - u_2(v_1+w_1)\big)$ *(por definición)*
$= (u_2v_3 + u_2w_3 - u_3v_2 - u_3w_2\ ;\ u_3v_1 + u_3w_1 - u_1v_3 - u_1w_3\ ;\ u_1v_2 + u_1w_2 - u_2v_1 - u_2w_1)$ *(distributiva de los reales)*
$= ((u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2w_3 - u_3w_2); (u_3v_1 - u_1v_3) + (u_3w_1 - u_1w_3); (u_1v_2 - u_2v_1) + (u_1w_2 - u_2w_1))$ *(prop. de los reales)*
$= (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1) + (u_2w_3 - u_3w_2; u_3w_1 - u_1w_3; u_1w_2 - u_2w_1)$ *(definición de suma de vectores)*
$= (uxv) + (uxw).$

c) ***Debemos demostrar que*** $k.(uxv) = (ku)xv = ux(kv), k \in \mathbb{R}$.
Se demostrará por transitividad.

1) ***Debemos probar que*** $k.(uxv) = (ku)xv$.
$k.(uxv) = k.(u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$
$= \big(k.(u_2v_3 - u_3v_2); k.(u_3v_1 - u_1v_3); k.(u_1v_2 - u_2v_1)\big)$ *(definición de producto por escalar)*
$= (ku_2v_3 - ku_3v_2; ku_3v_1 - ku_1v_3; ku_1v_2 - ku_2v_1)$ *(distributiva de los reales)*
$= ((ku_2)v_3 - (ku_3)v_2; (ku_3)v_1 - (ku_1)v_3; (ku_1)v_2 - (ku_2)v_1)$ *(asociativa de los reales)*
$= (ku)xv$

2) ***Debemos probar que*** $(ku)xv = ux(kv)$.
$(ku)xv = ((ku_2)v_3 - (ku_3)v_2; (ku_3)v_1 - (ku_1)v_3; (ku_1)v_2 - (ku_2)v_1)$ *(por definición de prod. cruz)*
$= (u_2(kv_3) - u_3(kv_2); u_3(kv_1) - u_1(kv_3); u_1(kv_2) - u_2(kv_1))$ *(conmutativa y asociativa de los reales)*
$= ux(kv)$

d) ***Debemos demostrar que*** $ux\vec{0} = \vec{0}xu = \vec{0}$
$ux\vec{0} = (u_2.0 - u_3.0; u_3.0 - u_1.0; u_1.0 - u_2.0) = (0;0;0) = \vec{0}$ *(def. de prod. cruz y elemento neutro de los reales)*
$\vec{0}xu = (0.u_3 - 0.u_2; 0.u_1 - 0.u_3; 0.u_2 - 0.u_1) = (0;0;0) = \vec{0}$ *(def. de prod. cruz y elemento neutro de los reales)*

e) ***Debemos demostrar que*** $uxu = \vec{0}$
$uxv = (u_2u_3 - u_3u_2; u_3u_1 - u_1u_3; u_1u_2 - u_2u_1)$ *(por def. de producto cruz)*
$= (u_2u_3 - u_2u_3; u_3u_1 - u_3u_1; u_1u_2 - u_1u_2)$ *(por conmutativa de los reales)*
$= (0;0;0)$ *(por propiedad de opuestos en los reales)*
$= \vec{0}$

Ejercicio 29. Sean u = (2,–1,–2) y v = (–3,2,4) vectores de IR^3. Hallar un vector de IR^3 que sea ortogonal a u y a v, y que tenga longitud 5. ¿Es único ese vector?

Resolución:

Por definición, el producto vectorial entre dos vectores, asigna a cada par de vectores un único vector ortogonal a ambos.

Para resolver el ejercicio se va a calcular uxv***, se normalizará dicho vector y posteriormente realizaremos la operación*** $5(uxv)$***. De esa manera lograremos que sea ortogonal a*** u ***y*** v ***y que además tenga la longitud pedida.***

$$uxv = \big(-1.4 - (-2).2; (-2).(-3) - 2.4; 2.2 - (-3).(-1)\big) = (-4+4; 6-8; 4-3) = (0;-2;1)$$

Normalización: $\|u\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \to v = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{5}}(0;-2;1) = \left(0; -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(0; -\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Para lograr que tenga longitud 5, se realiza la operación $5v$***:*** $w = 5v = \big(0; -2\sqrt{5}; \sqrt{5}\big)$.

Este vector no es el único que cumple con lo pedido, pues su opuesto también lo hace, $-w = \big(0; 2\sqrt{5}; -\sqrt{5}\big)$

Ejercicio 30. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores u = (-1,4,−3), v = (3,-2,0) y w = (3,1,−3) de IR^3.

Resolución:

El volumen de cualquier paralelepípedo determinado por vectores u, v y w, se obtiene a través del producto mixto.

$$\boldsymbol{Volumen = u.(vxw)}$$

$\boldsymbol{vxw = \left((-2).(-3) - 0.1; 0.3 - 3.(-3); 3.1 - (-2).3\right) = (6 - 0; 0 + 9; 3 + 6) = (6; 9; 9)}$

$\boldsymbol{u.(vxw) = -1.6 + 4.9 + (-3).9 = -6 + 36 - 27 = 3.}$

Por lo tanto el volumen del paralelepípedo es 3 un^3.

Ejercicio 31. Calcular el área del triángulo abc, siendo a = (2,2,0); b = (-1, 0, 2) y c = (0, 4, 3) puntos de IR^3.

Resolución:

Se sabe que el área de un paralelogramo determinado por vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ se calcula como: $\boldsymbol{Área = \|uxv\|}$

Para el caso de un triángulo determinado por vectores u y v en $\mathbb{R}^3$, se puede deducir que $\boldsymbol{Área \, \triangle = \frac{\|uxv\|}{2}}$.

Sean $u = \overrightarrow{ab}$ y $v = \overrightarrow{ac}$, entonces:

$\boldsymbol{u = \overrightarrow{ab} = (-1 - 2; 0 - 2; 2 - 0) = (-3; -2; 2)} \qquad \boldsymbol{v = \overrightarrow{ac} = (0 - 2; 4 - 2; 3 - 0) = (-2; 2; 3)}$

$\boldsymbol{uxv = \left(-2.3 - 2.2; 2.(-2) - (-3).3; (-3).2 - (-2).(-2)\right) = (-6 - 4; -4 + 9; -6 - 4) = (-10; 5; -10)}$

$\boldsymbol{\|uxv\| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15} \quad \rightarrow \quad$ ***Por lo que:*** $\boldsymbol{Área \, \triangle = \frac{\|uxv\|}{2} = \frac{15}{2} \, un^2}$.