Introducción al Algebra Lineal

Año 2020

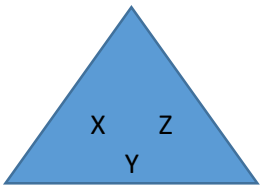
Soluciones Práctica 3:

Sistemas de ecuaciones lineales

➢ A desarrollar junto con el profesor en clases

Ejercicio 1. Calcule la longitud de cada lado de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 16 metros, sabiendo que la suma entre las longitudes de sus lados distintos es de 10 metros.

Resolución: Expreso como un sistema de ecuaciones lineales:



$$\begin{cases} x + y + z = 16\ (1) \\ x + y = 10\ (2) \\ x - z = 0 \quad (3), porque\ x = z \end{cases}$$

Resuelvo por despeje y sustitución, método simple que seguramente han usado, a modo de ejemplo para resolver el Sistema. En los próximos ejercicios usaremos los métodos específicos que se plantean en la Unidad.

Reemplazo de (3) x=z en (1): x +y + x= 2x+y=16*

Despejo de (2): x = 10-y

Reemplazo en *: 2(10-y) + y =16

: 20 – 2y + y= 16

: 20 – y =16

: y = -(16-20)=4

: y = 4

Entonces: x= 10 - 4 = 6 y por lo tanto x=z=6

En forma matricial: A . X = B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Noten que podríamos plantear este problema con otro sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 16\ (1) \\ x + y = 10\ (2) \\ y + z = 10\ (3) \end{cases}$$

Y deberíamos obtener los mismos resultados hallados anteriormente.

Ejercicio 2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = t \end{cases}$, determina, si existe, un valor de t de modo que el sistema posea infinitas soluciones.

Resolución:

Si observamos el sistema vemos que para que posea ***infinitas soluciones*** *la segunda ecuación debería ser proporcional a la primera ecuación.*

De esta manera ***t = 10****, nos da esta posibilidad.*

Resolviendo con ***t=10****, tenemos:*

De ec. (1) despejo:

y =-5 + 2x,

y reemplazo en la ec. (2):

4x – 2(-5+2x)=10

4x +10-4x=10, reordenando,

4x – 4x = 10-10

0=0

Lo que indica que el sistema admite infinitas soluciones

Ejercicio 3. El aire puro está compuesto esencialmente por un 78 por ciento de nitrógeno, un 21 por ciento de oxígeno y un 1 por ciento de argón. Para poder realizar un experimento en el planeta Marte se dispone de una habitación que queremos llenar con 1000 litros de aire puro para los astronautas. Para ello, la habitación se encuentra alimentada por tres tanques T1, T2 y T3 llenos de estos elementos químicos, en la siguiente proporción:

T1: 50 por ciento de nitrógeno y 50 por ciento de oxígeno.

T2: 80 por ciento de nitrógeno y 20 por ciento de oxıgeno.

T3: 60 por ciento de nitrógeno, 30 por ciento de oxígeno y 10 por ciento de argón.

Calcular la cantidad de litros necesaria de cada tanque para que la mezcla resultante produzca la cantidad buscada de 1000 litros de aire puro dentro de la habitación.

Resolución:

Aire puro*: 78%N_2 + 21%O_2 + 1%Ar*

Volumen Habitación*: 1000 l de aire puro. Entonces su volumen estaría compuesto por las siguientes proporciones (en litros) de aire puro:* ***780 N_2 + 210 O_2 + 10 Ar***

***Alimentada por 3 tanques**:*

T1: 50 por ciento de nitrógeno y 50 por ciento de oxígeno.

T2: 80 por ciento de nitrógeno y 20 por ciento de oxıgeno.

T3: 60 por ciento de nitrógeno, 30 por ciento de oxígeno y 10 por ciento de argón.

Planteo sistema de ecuaciones lineales para calcular cuánto se debe agregar de cada tanque para alcanzar la proporción de aire puro, o sea la cantidad correspondiente de Nitrógeno, Oxígeno y Argón en la habitación:

Expreso cada coeficiente que está en % como proporción, es decir 50% sería 50/100= 0,50:

$$\begin{cases} 0{,}50.T1 + 0{,}80.T2 + 0{,}60.T3 = 780\ (litros\ de\ Nitrógeno)(1) \\ 0{,}50.T1 + 0{,}20.T2 + 0{,}30.T3 = 210\ (litros\ de\ Oxígeno)(2) \\ 0{,}10.T3 = 10\ (litros\ de\ Argón)(3) \end{cases}$$

De (3) despejo: $T3 = \frac{10}{0{,}10} = 100$ *(litros de T3)*

De (1) despejo $T1 = \frac{780-0{,}80T2-0{,}60.100}{0{,}50}$

Reemplazo en (2) y queda todo expresado en función de una sola variable T2:

$$\cancel{0{,}50}\left(\frac{780-0{,}80T2-0{,}60.100}{\cancel{0{,}50}}\right) + 0{,}20.T2 + 0.30.100 = 210$$

780 - 0,80.T2 – 60 + 0,20.T2 + 30 = 210

-0,60.T2 =-540

T2 = $\frac{-540}{-0{,}60}$ *=900 (litros de T2)*

Reemplazando T2 y T3 en $T1 = \frac{780-0{,}80T2-0{,}60.100}{0{,}50}$*:*

$T1 = \frac{780-0{,}80.900-0{,}60.100}{0{,}50} = 0$ *(litros de T1)*

<u>Rta</u>: Se deben agregar 900 litros de T2 y 100 litros de T3

Ejercicio 4. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) Determina su forma matricial.
b) Escribe su matriz ampliada.

I) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$ III) $\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3y + z - 2t = 2 \end{cases}$ IV) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 6y = -1 \\ -7x - 3y = -2 \end{cases}$

Resolución:

I) A cargo del alumno/a

II) ***a- Forma matricial***

A . X = B

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b- Matriz Ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

III) ***A cargo del alumno/a.***
IV) ***A cargo del alumno/a.***

Ejercicio 5. Dados los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio anterior, analiza el tipo de solución aplicando el teorema de Rouché- Frobenius.

Resolución:

I) ***A cargo del alumno/a.***

II)
$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Recordamos:

✓ ***Teorema de Rouché – Frobenius (o de Kroenecker- Capelli)***

Si A es la matriz principal, A es la matriz ampliada y n es el número de incógnitas, se puede afirmar que:*

- *Si el rango (A) = rango (A*) = n, el sistema es* ***compatible determinado*** *(solución única).*
- *Si el rango (A) = rango (A*) < n, el sistema es* ***compatible indeterminado*** *(infinitas soluciones).*
- *Si el rango (A) ≠ rango (A*), el sistema es* ***incompatible*** *(solución vacía).*

Resolvemos:

A partir de la matriz ampliada, la llevamos a su forma escalonada reducida, aplicando operaciones elementales por filas (método de Gauss- Jordan).

Operaciones elementales:

- *Multiplicar a una de las filas por una constante no nula.*
- *Intercambiar dos de las filas.*
- *Sumar algebraicamente, un múltiplo de una de las filas a otra.*

De esta manera podemos calcular el Rango de la matriz principal y de la matriz ampliada, evaluar la solución y encontrarla si existe.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Intercambio F_1 por F_2.

Identifico el pivote de la primera fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Hago cero los elementos por debajo del PIVOTE.

$F'_2 = F_2 - 2\,F_1$ (significado: la nueva fila 2, identificada como F'_2, se obtiene de restar 2 veces la fila 1(F_1) a la fila 2 de la matriz anterior (F_2))

$F'_3 = F_3 - 3F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Obtengo el pivote de la fila 2.

$F'_2 = (-1).F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hago cero los elementos de la columna del segundo PIVOTE, que se encuentran por debajo de él.

$F'_3 = F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como no puedo obtener otro pivote, correspondiente a la tercera fila, porque esta se hizo cero, ***procedo a hacer cero los elementos de la columna del segundo PIVOTE, que se encuentran por encima de él, y obtener así la forma escalonada reducida*** *de la matriz.*

$F'_1 = F_1 - F_2$

Como ya obtuve la forma escalonada reducida puedo proceder al análisis de los rangos.

- ✓ **Análisis Rouché- Frobenius:**

Rango (A) = Rango (A*)= 2 < 3, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

III) A cargo del alumno/a.
IV) A cargo del alumno/a.

Ejercicio 6. Encuentra los valores de "a" tales que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=-1 \\ 5x-8y+(a^2-2)z=a \end{cases}$ posea:

a) Infinitas soluciones.
b) Ninguna solución.
c) Única solución.

Resolución:

PASOS:

1º Formamos la matriz ampliada y aplicamos el método de Gauss Jordan, mediante operaciones elementales por filas. Identificamos el pivote en la primera fila y columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & (a^2-2) & a \end{array}\right)$$

2º Convertimos en cero los elementos de la columna del primer pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- $F'_2 = F_2 - 2F_1$
- $F'_3 = F_3 - 5F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & (a^2-7) & a-5 \end{array}\right)$$

3º Obtenemos el pivote de la segunda fila:

- $F'_2 = 1/7.\ F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 7 & (a^2-7) & a-5 \end{array}\right)$$

4º Convertimos en cero los elementos de la columna del segundo pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- $F'_3 = F_3 - 7F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{array}\right)$$

*5º Obteniendo esta **forma escalonada de la matriz ampliada**, hemos logrado simplificar el sistema y estamos en condiciones de analizar que valores debe tomar "**a**" para obtener las distintas soluciones, aplicando el **Teorema de Rouché Frobenius**:*

a) Infinitas soluciones

Si el rango (A) = rango (A) < n, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Para ello, entonces:*

- *Rango (A: matriz principal) = rango (A*: matriz ampliada) y menor a n: número de incógnitas que vale 3.*
  p(A)=p(A) < 3*
- *Por lo tanto, la posibilidad que tenemos es que el rango de las matrices sea 2, para ello:*
  $a^2 - 4 = 0 \; y \; a - 2 = 0$
  $a^2 - 4 = 0$, *entonces a=±2*
  $a - 2 = 0$, *entonces a=2*
  Por lo tanto: a=2 cumple con las dos condiciones al mismo tiempo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{array}\right), \text{ si a=2 entonces: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

*El valor de "**a**" que cumple con las dos condiciones es **a=2,** de esta manera la última fila se hace cero, el Rango de A y el rango de A* serán iguales a 2, y menor a **n** que es 3, y el sistema tendrá infinitas soluciones.*

b) Ninguna solución

Si el rango (A) ≠ rango (A), el sistema es **incompatible** (solución vacía).*

p(A) ≠p(A); por lo tanto:*
p(A) =2, entonces, $a^2 - 4 = 0$ *y*
p(A)=3; para ello:* $a - 2 \neq 0$
Entonces a=-2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{array}\right) \text{si a=-2, entonces: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

*El valor de "**a**" que cumple con las dos condiciones es **a=-2,** así la última fila de la matriz principal se hace cero, el Rango de A=2, pero la última fila de la matriz ampliada **no** se hace cero y el Rango de A*=3, de esta manera ambos rangos son distintos y el sistema no tiene solución.*

c) Única solución

Si el rango (A) = rango (A) = n, el sistema es **compatible determinado** (solución única).*
p(A)=p(A) =3*

Para ello:

$a^2 - 4 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & \neq 0 & a-2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto: $a \neq 2 \; y \; a \neq -2$

*El valor de "**a**" que cumple con la condición es **a≠±2,** de esta manera el Rango de A y el rango de A* serán iguales a 3, e igual a **n** que es 3, y el **sistema tendrá solución única**.*

Ejercicio 7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ x-y+2z=-7 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}$ ¿Existe algún valor de r tal que x = 1, y = 2, z = r, sea una solución del sistema?

Resolución:

*Reemplazo en el sistema por **x = 1, y = 2, z = r**, para averiguar si existe algún valor de r que sea solución del sistema:*

$$\begin{cases} 2+6-r=11 \\ 1-2+2r=-7 \\ 3+4+r=4 \end{cases} ;\, quedaría \begin{cases} 8-r=11 \\ -1+2r=-7 \\ 7+r=4 \end{cases} y\ despejando\ r\ enc\ ada\ ecuación: \begin{cases} r=-3 \\ r=-3 \\ r=-3 \end{cases}$$

Por lo tanto S = { (1,2,-3)} sería solución del sistema

Ejercicio 8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{cases} 3x+2y-5z=0 \\ -4x+2y+2z=0 \\ x-6y-2z=0 \end{cases}$:

a) Define la matriz principal del sistema.

b) Calcula el det (A).

c) Analiza que tipo de solución admite.

Resolución:

a) Matriz principal del sistema.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Calculo el det (A)

Método de Sarrus:

$$|A| = \left|\begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \\ 1 & -6 \end{matrix}\right| = (-12+4-120)-(-10-36+16)=-98$$

c) Análisis del tipo de solución que admite.

*Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo, **A.X = 0,** admite solución, es decir son sistemas compatibles.*

*Una manera sencilla de analizar y determinar la solución en un **sistema de ecuaciones lineales homogéneo**, es calcular el valor del determinante de su matriz principal.*

*Si **det (A) ≠ 0** admite la solución trivial*

*Si **det(A) = 0**, admite infinitas soluciones*

*En este caso, como el **det (A) ≠ 0** admite la solución trivial y el conjunto solución está formado por:*

Escriba aquí la ecuación. **S = {(0,0,0)}**

Ejercicio 9. Aplicando el teorema de Rouché – Frobenius, determina si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos poseen solución no trivial:

a) $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-y=0 \\ -3x+4y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$

Resolución:

a) A cargo del alumno/a.
b) A cargo del alumno/a
c) A cargo del alumno/a
***d) Método que pide Ejercicio**: Aplicando el **TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS**, hay que calcular el rango de la matriz principal, porque en un sistema lineal homogéneo, los rangos de las matrices principal y ampliada coinciden, por ello este tipo de sistemas son siempre compatibles.*

1° Formamos la matriz ampliada y aplicamos el método de Gauss Jordan, mediante operaciones elementales por filas.

Identificamos el pivote en la primera fila y columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2° Convertimos en cero los elementos de la columna del primer pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- $F'_2 = F_2 - 2F_1$
- $F'_3 = F_3 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3° Obtenemos el pivote de la segunda fila

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4° Convertimos en cero los elementos de la columna del segundo pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- $F'_3 = F_3 + F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5° Convertimos en cero los elementos de la columna del segundo pivote, que se encuentran por encima de él, para llevar a la forma escalonada reducida, aplicando las siguientes operaciones:

- *$F'_1 = F_1 + 2F_2$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6° Calculamos El Rango de la matriz =2 (cantidad de filas distintas de cero)

***7°** Aplicando **Rouché- Frobenius** vemos que:*

Rango (A) = Rango (A)= 2 < 3, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).Posee solución no trivial.*

***Otro Método**: Una manera sencilla de analizar y determinar la solución en un **sistema de ecuaciones lineales homogéneo**, es calcular el valor del determinante de su matriz principal.*

*Si **det (A) ≠ 0** admite la solución trivial*

*Si **det(A) = 0**, admite infinitas soluciones*

*Sistema de ecuaciones lineales homogéneo: **d)*** $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$

*Calculo el **determinante de A:***

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ *= 0→ Posee infinitas soluciones*

S = { (x. y. z): -x+y-2z = 0} es el conjunto solución

Ejercicio 10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+ay+2z=0 \\ 2x-y-az=0 \end{cases}$ .Indica para que valores de "a" el sistema es:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

Resolución:

a) *Para que el Sistema lineal homogéneo sea **Compatible determinado** (solución única: trivial), el determinante de la matriz principal debe ser **distinto de cero**.*

Calculo el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & -1 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & a \\ 2 & -1 \end{matrix} \neq 0$$

$|A| =$ *(-a²+8-1) – (~~-2a~~ -2 + ~~2a~~)= -a²+9 ≠ 0 →* ***a*** $\neq \pm 3$

b) *Para que el Sistema lineal homogéneo sea* ***Compatible indeterminado*** *(infinitas soluciones), el determinante de la matriz principal debe ser cero.*

Por lo tanto del cálculo del determinante en el punto anterior se deduce que ***a=*** ± 3

Ejercicio 11. Dadas las siguientes matrices ampliadas asociadas a un sistema de ecuaciones lineales. Determina su conjunto solución aplicando el método de Gauss- Jordan.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Resolución:

a) A cargo del alumno/a.

b) A cargo del alumno/a

c) ***Resolvemos:*** *Aplicamos* ***Gauss- Jordan*** *a la siguiente matriz ampliada, para llevarla a su forma escalonada reducida y hallar el conjunto solución del SEL.*

1° Formamos la matriz ampliada y aplicamos el método de Gauss Jordan, mediante operaciones elementales por filas.

Identificamos el pivote en la primera fila y columna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

2° Convertimos en cero los elementos de la columna del primer pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- $F'_3 = F_3 - 3.F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 13 & -4 \end{array}\right]$$

3° Identificamos el pivote de la segunda fila (ya tenemos un uno, no hay que realizar operaciones)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 13 & -4 \end{array}\right]$$

4° Convertimos en cero los elementos de la columna del segundo pivote, que se encuentran por debajo de él, aplicando las siguientes operaciones:

- *$F'_3 = F_3 + F_2$*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -5 \end{array}\right]$$

5° Obtenemos el pivote de la fila 3.

- *$F'_3 = 1/15.\ F_3$*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

6° Convertimos en cero los elementos de la columna del tercer pivote, que se encuentran por encima de él, aplicando las siguientes operaciones:

- *$F'_2 = F_2 - 2F_3$*
- *$F'_1 = F_1 + 4F_3$*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

7° Convertimos en cero los elementos de la columna del segundo pivote, que se encuentran por encima de él, aplicando las siguientes operaciones:

- *$F'_1 = F_1 - 2F_2$*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

8° Ya hemos obtenido la matriz en su forma escalonada reducida, y podemos obtener el conjunto solución de sistema:

- ✓ *Analizamos los rangos por Rouché- Frobenius:*
  Rango (A) = Rango (A) = n,*
  *el sistema es **compatible determinado** (solución única):*

- ✓ *El **conjunto solución es**: **S = {(4/3, -1/3, /1/3)}***

d) A cargo del alumno/a.

Ejercicio 12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y + -z = 6 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$, agrega una nueva ecuación, de manera que el sistema resulte:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

Resolución:

- ✓ ***Teorema de Rouché – Frobenius (o de Kroenecker- Capelli):*** *analizo las posibles soluciones del sistema.*

  1° Expreso la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

2° Analizo*: Si A es la matriz principal, A* es la matriz ampliada y n es el número de incógnitas:*

a) ***Compatible determinado****: el rango (A) = rango (A*) = n. Para ello la tercer ecuación no debe ser proporcional a ninguna de las anteriores, es decir no se deben anular completamente sus coeficientes al sumarle o restarle un múltiplo de otra ecuación, al llevarla a su forma escalonada reducida.*

Hay múltiples opciones posibles, un ejemplo sería, 3x+2y-z=2, *con esta ecuación el sistema tiene solución única: x=-25/6, y= 13/3 y z = -35/6.*

S = { (-25/6, 13/3, -35/6)}

Esto se comprueba aplicando Gauss- Jordan y reduciendo la matriz ampliada a su forma escalonada reducida, pasos que quedan a realizar por el alumno/a.

b) ***Compatible indeterminado****: el rango (A) = rango (A*) < n.*

Para ello, deben anularse completamente los coeficientes de la tercera ecuación, cuando se apliquen operaciones elementales por filas y se lleve a la matriz ampliada a su forma escalonada reducida.

Una opción de respuesta sería*:*

S= { (x, y, z): -x –y + z= -6 },

de esta manera al reducir la matriz ampliada a su forma escalonada reducida, se anula la tercer fila de la matriz ampliada, los rangos de la matriz principal y matriz ampliada quedan igual a dos y menor al número de incógnitas que es 3.

c) ***Incompatible:*** *el rango (A) ≠ rango (A*). Para ello, deben anularse los coeficientes de la matriz principal y no de la ampliada, es decir el elemento correspondiente a la tercera fila del término independiente no debe ser cero al llevarse a su forma escalonada reducida, de esta manera los rangos de las matrices serán distintos y el sistema no tendrá solución.*

La solución es:

S = { } conjunto vacío

Ejercicio 13. Resuelve, si es posible, por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x-2y-4=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+7y=8 \\ 10x+14y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x-2y+2z=1 \\ 2x+4y-6z=3 \\ 4x+2z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ -2x+y+3z=-1 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

Resolución:

Recordemos…MÉTODO DE CRAMER:

Sea A.X = B un sistema de ecuaciones lineales de orden n, este sistema posee solución única si y solo si el determinante de su matriz principal A es no nulo, en cuyo caso el conjunto solución S = {(x_1, x_2, …, x_n)}, siendo:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

En donde Aj es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz B.

a) A cargo del alumno/a.

b) $\begin{cases} 5x+7y=8 \\ 10x+14y=3 \end{cases}$

Analizando el sistema, vemos que la matriz principal es una matriz cuadrada, por lo tanto, puedo calcular su determinante:

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$

No se puede aplicar Cramer porque el determinante de la matriz principal es cero.

c) A cargo del alumno/a

d) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ -2x+y+3z=-1 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

Analizando el sistema, vemos que la matriz principal es una matriz cuadrada, por lo tanto, puedo calcular su determinante:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -28$

$|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única.

Aplico Cramer para obtener la solución:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-21}{-28} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{7}{-28} = -\frac{1}{4}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-7}{-28} = \frac{1}{4}$$

Conjunto Solución **S = {(3/4, -1/4, ¼)}**

- **<u>Ejercitación adicional propuesta para el alumno</u>**

- ***A cargo del alumno/a***