Trabajo Práctico Nº2: Límite y Continuidad

Objetivo: que el estudiante de Cálculo I/Elementos de Cálculo I incorpore el concepto de límite y sus propiedades, aplique procedimientos algebraicos o teoremas que permitan determinar los límites de funciones, y emplee el concepto de límite para: el análisis de continuidad y el cálculo de asíntotas (horizontal, vertical y oblicua) de funciones. Que el estudiante de Cálculo I utilice la definición formal de límite para demostrar límites de funciones lineales.

NOTA AL ESTUDIANTE: en las Partes A y B encontrará ejercicios a resolver en clase práctica. Se sugiere que los ejercicios propuestos en la Parte C, se resuelvan en forma completa por el estudiante como trabajo extra-áulico. Las dudas pueden ser resueltas con cualquiera de los profesores de la materia Cálculo/Elementos de Cálculo I en las horas de consulta.
Se recomienda, además, disponer de alguna herramienta (graficación y/o resolución de ejercicios) contra la cual comparar los resultados obtenidos en el desarrollo "manual" de cada ejercicio.

PARTE A: Ejercicios Comunes a Cálculo/Elementos

LÍMITE

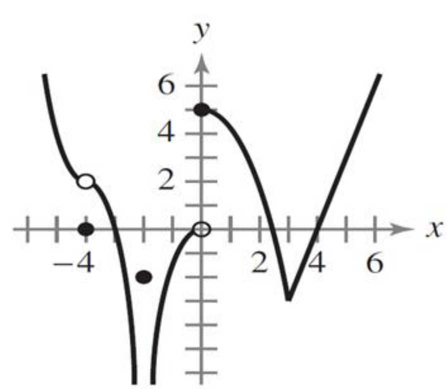
1. Estimar los siguientes límites elaborando para ello una tabla de valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima al valor para el cual se pide el límite. Luego, utilizar una herramienta de graficación con el fin de confirmar el resultado obtenido.

   a. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x}$

2. Graficar la función para encontrar su límite (si es que existe). Si no existe, explicar por qué.

   $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$

3. Utilizar la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[-5{,}5\ ;\ 6]$con el fin de identificar los valores de x para los que existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.



4. Dibujar la gráfica de $f(x)$ y luego identificar los valores de x para los cuales existe $\lim_{x \to c} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) & si\ x < 0 \\ 1 - \cos(x) & si\ 0 \leq x \leq \pi \\ \cos(x) & si\ x > \pi \end{cases}$$

5. Describir brevemente lo que significa la notación $\lim_{x \to 8} f(x) = 25$. Acompañe su descripción con una interpretación gráfica de la misma.

6. Si f (2) = 4, ¿se puede concluir algo acerca del límite de f cuando x tiende a 2? Explicar.

7. Si el límite de f cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de f (2)? Explicar.

8. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ no existen, ¿Se puede afirmar que $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)]$, $\lim_{x \to a}[f(x) * g(x)]$ y $\lim_{x \to a} f(x^2)$ no existen? Ejemplificar en cada caso.

9. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué, o dar un ejemplo que lo demuestre.

   a. Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f\ (x)$ cuando se aproxima a c.

   b. Si el límite de $f\ (x)$ cuando x tiende a c es cero, debe existir un número k tal que $f\ (k) < 0{,}001$

   c. Si f (c) = L, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

   d. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces f (c) = L.

10. Calcular el límite utilizando las propiedades y teoremas estudiados en clase, aclarando cuál de ellas utilizó en cada paso.

    a. $\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 1}$ b. $\lim_{x \to 1} cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ c. $\lim_{x \to 1} g(f(x))$ donde $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = x^3$

11. Utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

    a. $g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$

       i. $\lim_{x \to 1} g(x)$

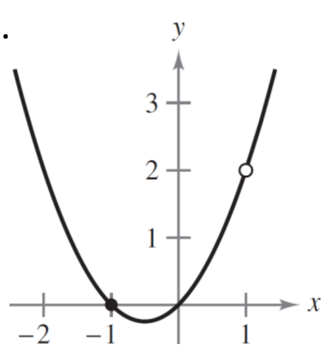
       ii. $\lim_{x \to -1} g(x)$

    b. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$

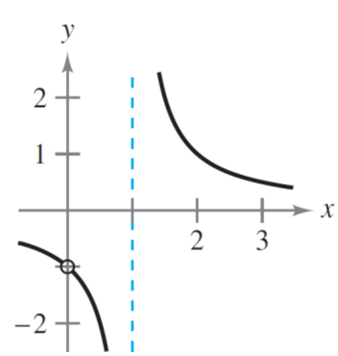
       i. $\lim_{t \to 1} f(x)$

       ii. $\lim_{t \to 0} f(x)$

a.



b.



12. Encontrar el límite si existe (trabajar algebraicamente, aplicar límites notables o teorema del emparedado).

a. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x+12}{x+3}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-5)^2-25}{x}$ c. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)(1-cos(x))}{x^2}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{2x}$

g. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen^2(2x)}{x}$ h. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{sen(x^2-1)}{x-1}$ i. $\lim\limits_{x\to 0} x\ cos\ (x)$

j. $\lim\limits_{x\to 0} x\ sen\left(\frac{1}{x}\right)$ k. $\lim\limits_{t\to 3}\frac{t^4-81}{|t^2-9|}$ l. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x\ cos\ (x)}$

13. Calcule los siguientes límites para x tendiendo a infinito, en caso de que existan. Justifique.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-2x}{3x-7}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+7x}{x^4-2}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ f. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7-1}{x^6+1}$

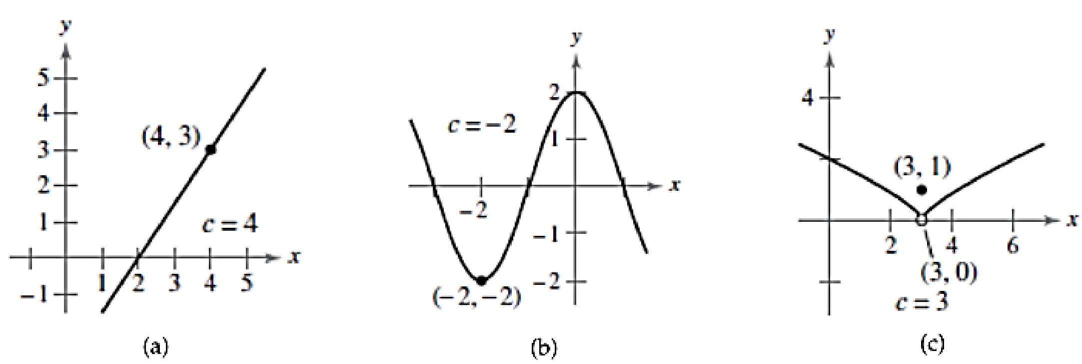
g. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ h. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4-5x^3}{\sqrt{x^6+3}}$

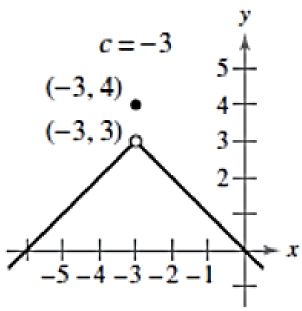
14. De los siguientes incisos, en uno se provee de suficiente información para calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y en el otro no. Para el que sí, calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y menciona la propiedad o teorema empleado. Explica por qué una de las opciones no puede emplearse para el cálculo de dicho límite

a. $4x-5\le f(x)\le x^2$
b. $2x+1\le f(x)\le x^2+2$

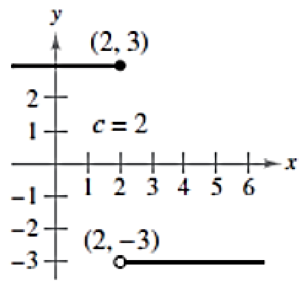
CONTINUIDAD

15. Para cada una de las siguientes gráficas calcule los límites dados y analice la continuidad de la función en c, es decir las 3 condiciones: $f(c)\,está\ definida, \lim\limits_{x\to c} f(x)\ \exists,\ y\ \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

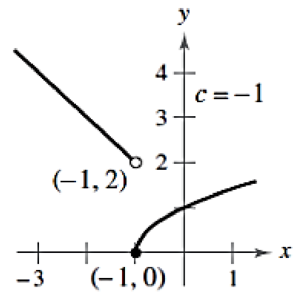




(d)



(e)



(f)

16. Analice la continuidad de cada una de las siguientes funciones:

    a. $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ b. $f(x) = \frac{1}{2}\left\|x\right\| + x,$ (||x||→parte entera)

17. Encuentre las **discontinuidades** de las siguientes funciones y diga cuáles son evitables

    a. $f(x) = \frac{|x-8|}{x-8}$ b. $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x < 1 \\ x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

18. Verifica si el Teorema del Valor medio es aplicable a las siguientes funciones en el intervalo dado y encuentre el valor de c:

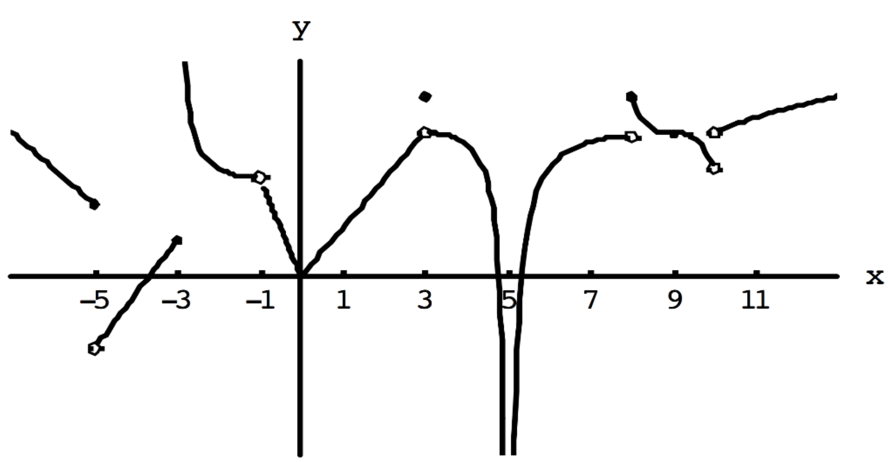
    a. $f(x) = x^2 + x - 1,$ $[0,5],\quad f(c) = 11$

    b. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1},$ $\left[\frac{5}{2}, 4\right],\quad f(c) = 6$

19. A partir de la gráfica de la función f:

    a. Dé los valores de x en que f es discontinua y explique por qué.

    b. Para cada uno de los valores de x que se den en el inciso a, determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



20. Explique por qué la función es discontinua en el punto $x = a$ dado. Bosqueje su gráfica.

a. $f(x) = \ln|x-2|$, $a = 2.$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-4} & si\ x \neq 4 \\ 3 & si\ x = 4 \end{cases}$, $a = 4$

21. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los pares de números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2 & si\ x \leq 1 \\ ax - 3a & si\ x > 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ ax + b & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

22. Dada la función por partes f en el intervalo $[-3,4\,]$ grafique y:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2} & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3} & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a. Determine para qué valores de x la función es discontinua (evalúe para cada x las 3 condiciones de continuidad).

b. Clasifique las discontinuidades halladas en inevitable o evitable según corresponda. En este último caso, indique cómo se puede redefinir $f(x)$ para eliminar la discontinuidad.

23. Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine:

a. $\lim_{x\to 2} f(x)$

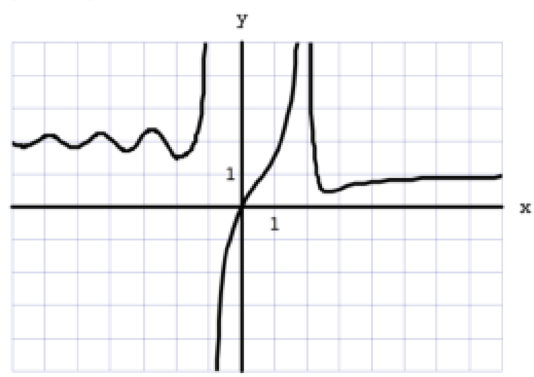
b. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

c. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

d. $\lim_{x\to \infty} f(x)$

e. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

f. Las ecuaciones de las asíntotas.



24. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales a las gráficas de cada una de las siguientes funciones. Represente gráficamente.

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

b. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

c. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

25. En la teoría de la relatividad de Einstein, la longitud de un objeto con respecto a un observador varía de acuerdo a la velocidad v con que viaja el objeto respecto del observador. Si L_0 es la longitud del objeto en reposo con respecto al observador, entonces la longitud del objeto cuando se mueve a una velocidad v con respecto al observador viene dada por:

$$L(v) = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Donde c es una constante (velocidad de la luz en el vacío). Responder:

a. ¿Qué sucede con la longitud L cuando v aumenta? Expréselo empleando simbología de límite.

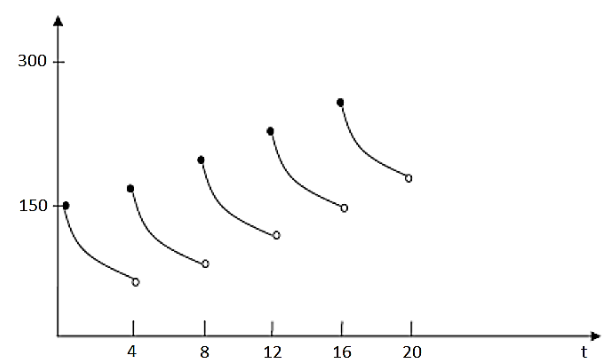
b. Determine el límite $\lim_{v\to c} L(v)$.

c. ¿Por qué sólo es posible tomar el límite por la izquierda de la función $L(v)$ cuando v tiende a c?

26. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada cuatro horas. El gráfico muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en la corriente sanguínea, después de t horas. Encuentre y explique el significado de estos límites laterales

a. $\lim_{t\to 12^+} f(t)$

b. $\lim_{t\to 12^-} f(t)$



Parte B: ejercicios para Cálculo

27. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ puede existir aunque ni $\lim_{x\to c}[f(x)]$ ni $\lim_{x\to c}[g(x)]$ existan.

28. Demuestre por definición los siguientes límites, donde $a \in \mathbb{R}$:

a. $\lim_{x\to 2}(5x+3) = 13$

b. $\lim_{x\to 2}(x+a) = 2+a$

c. $\lim_{x\to a}|2x-a| = |a|$

d. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1} = 1$

e. $\lim_{x\to\infty} x^2 - x + 1 = \infty$

29. Demuestre que:

a. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

b. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ si y sólo si $\lim_{x\to a}[f(x) - 1] = 0$

c. De un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$

30. Si $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *siempre que* $x \in A\setminus\{a\}$ y $|x-a| < \delta$.

31. Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

32. Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones y sea a un número real. Demuestre que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe.

33. Suponga que la función $f: A \to \mathbb{R}$ tiene límite en el punto $x = a$. Si $\alpha > \lim_{x\to a} f(x) > \beta$, demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $\alpha > f(x) > \beta$ siempre que $x \in A\setminus\{a\}$ y $|x-a| < \delta$.

34. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan. Justifique explicando en cada paso la propiedad aplicada.

a. $\lim_{x\to -\infty} \left(|x| - \sqrt{x(x+3)}\right)$

b. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2}-\sqrt{x-3}}$

c. $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x(x+2)} - |x|)$

35. Según cierta hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t es:

$$v(t) = v^*\left(1 - e^{-\frac{gt}{v^*}}\right)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y $v*$ es la velocidad final de la gota de lluvia.

a. Encuentre la velocidad $v(t)$ cuando el tiempo crece

b. Trace la gráfica de $v(t)$ si $v* = 1\, m/s$ y $g = 9{,}8\, m/s^2$.¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad final? Determine gráfica y analíticamente.

Parte C: Ejercicios Extra áulicos

1. Estimar los siguientes límites elaborando para ello una tabla de valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima al valor para el cual se pide el límite. Luego, utilizar una herramienta de graficación con el fin de confirmar el resultado obtenido.

   d. $\displaystyle lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{x}$ e. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+x-6}$

2. Graficar la función para encontrar su límite (si es que existe). Si no existe, explicar por qué: $\displaystyle \lim_{x\to e} \frac{2}{x-5}$

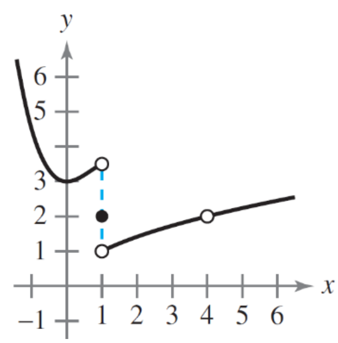
3. Utilizar la gráfica de la función $f(x)$ para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubicarlo en la gráfica. Si no existe, explicar por qué.

   a. $f(1)$

   b. $\displaystyle \lim_{x\to 1} f(x)$

   c. $f(4)$

   d. $\displaystyle \lim_{x\to 4} f(x)$



4. Calcular el límite utilizando las propiedades y teoremas estudiados en clase, aclarando cuál de ellas utilizó en cada paso.

   a. $\displaystyle lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+4}$ b. $\displaystyle lim_{x\to 1} g(f(x))$ donde $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. c. $\displaystyle lim_{x\to 2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

5. Utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

   $\displaystyle \lim_{x\to c} f(x) = 3$ $\displaystyle \lim_{x\to c} g(x) = 2$

   a. $\displaystyle \lim_{x\to c}[5g(x)]$ b. $\displaystyle \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ c. $\displaystyle \lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ d. $\displaystyle \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

6. En el contexto del cálculo de límites, explicar qué se quiere decir mediante las funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

7. Se sabe que si $x \neq 0$, entonces: $\frac{1}{x} - 1 < u(x) \leq \frac{1}{x}$. Con esta información ¿Es posible determinar si el límite: $\displaystyle \lim_{x\to 0} x.u(x)$ existe y, en este caso, su valor? Indique propiedad o teorema que emplearía.

8. Encontrar el límite si existe (trabajar algebraicamente, aplicar límites notables o teorema del emparedado).

   a. $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$ b. $\displaystyle lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ c. $\displaystyle lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x}$

d. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{sen(3x)}$

f. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{cos(x)}$

g. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,(x)}{x}$

h. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{ctg(2t)\cdot sen(5t)}{t\cdot sen(7t)}$

i. $\lim\limits_{t\to 1}\frac{|1-t^2|}{t-1}$

9. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué, o dar un ejemplo que lo demuestre.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$

b. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{sen(x)}{x}=1$

c. Si $f(x) = g(x)$ para todos los reales distintos a $x=0$, y $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=L$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=L$.

d. Si $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$, entonces $f(c) = L$

e. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$, donde $f(x)=\begin{cases}3 & si\ x\le 2\\ 0 & si\ x>2\end{cases}$

f. Si $f(x) < g(x)$ para todos los reales, excepto en $x=a$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$

10. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan. Justifique.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+3)-\ln(x)]$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3-x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

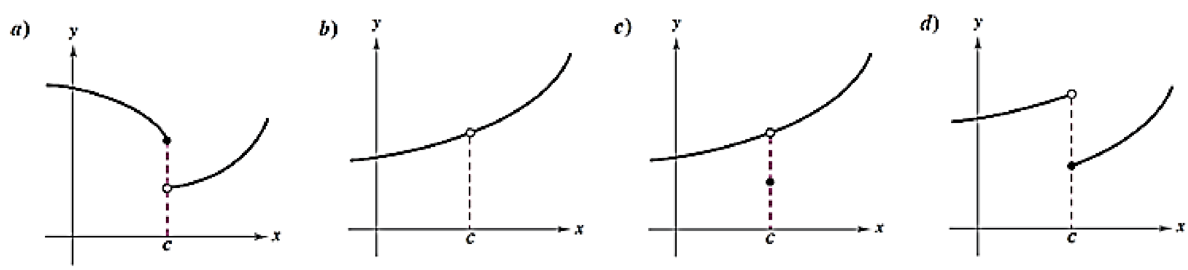
g. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x}-\frac{x^3}{(x-1)^2}\right]$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5x^2)$

j. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

11. Indique la condición de continuidad que no se cumple en cada una de las siguientes funciones:



12. Encuentre las discontinuidades de las siguientes funciones y diga cuáles son evitables:

a. $f(x)=\frac{6}{x}$

b. $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$

c. $f(x)=\begin{cases}-2x & si\ x\le 2\\ x^2-4x+1 & si\ x>2\end{cases}$

d. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$ e. $f(x) = \frac{x-6}{x^2-36}$ f. $f(x) = \begin{cases} \tan\frac{\pi x}{4} & si \quad |x| < 1 \\ x & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}$

g. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$

13. Describa los intervalos en los que la función es <u>continua</u>:

a. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+2}$ b. $f(x) = x\sqrt{x+3}$ c. $f(x) = sec\frac{\pi x}{4}$ d. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

14. Encuentre, si los hay, los valores de x en que la función dada es <u>discontinua</u>. ¿En cuáles de estos valores f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de f.

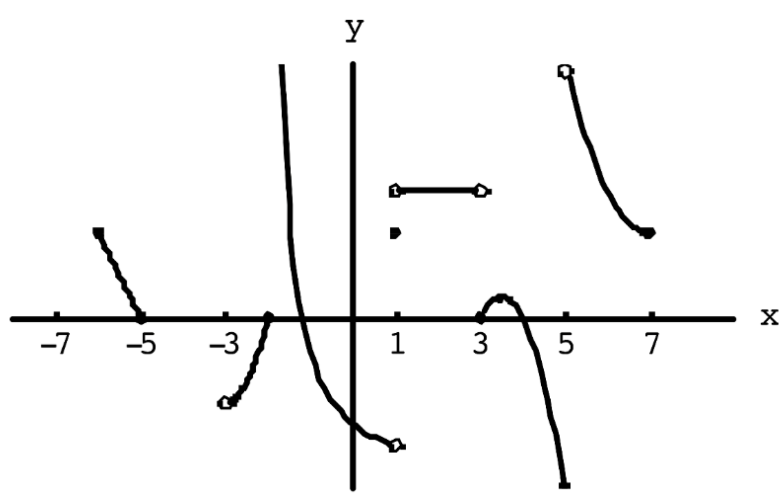
a. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si & x \leq -1 \\ 3x & si & -1 < x < 1 \\ 2x-1 & si & x \geq 1 \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si \quad x < 0 \\ (x+1)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

15. Verifica si el Teorema del Valor medio es aplicable a las siguientes funciones en el intervalo dado y encuentre el valor de c:

c. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0,3]$, $f(c) = 0$

d. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0,3]$, $f(c) = 4$

16. A partir de la gráfica de la función g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



17. Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

a. La función dada por $f(x) = (x + 2x^3)^4$ es continua en -1,

b. La función dada por $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en [-4,4].

18. Explique por qué la función es discontinua en el punto $x = a$ dado. Bosqueje su gráfica.

a. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $a = -1$.

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$, $a = 1$

c. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si\ x > 2 \end{cases}$, $a = 2$

19. En cada uno de los siguientes casos, halle todos los pares de números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \leq 2 \\ ax^2 & si\ x > 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \leq -1 \\ ax + b & si\ -1 < x < 3 \\ -2 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

20. Halle una fórmula para una función f que tenga asíntotas verticales de ecuación $x = 1$ y $x = 3$, y asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.

21. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales a las gráficas de cada una de las siguientes funciones. Represente gráficamente.

a. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ b. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+4}$ c. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$ d. $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$

22. Un dispositivo registra los valores de la frecuencia cardíaca de un paciente internado. El gráfico muestra la frecuencia cardíaca expresada en pulsaciones por minuto en función del tiempo expresado en horas. Debido a una falla en el mecanismo de impresión, en el gráfico no aparece el valor correspondiente a las 14,00 horas.

a. ¿Qué valor espera que haya tenido la frecuencia cardíaca a las 14,00 horas?

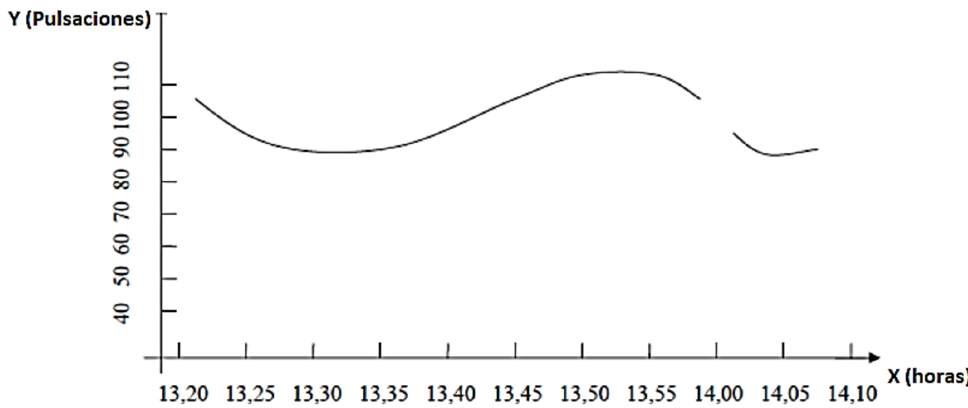
b. Para responder lo anterior ¿qué intervalo o intervalos de tiempo tuvo en cuenta?

c. Por ejemplo, ¿importan los valores de la función antes de las 13,50?

d. En la actividad anterior se trató una función cuyo valor en un instante determinado (a las 14,00 horas) era desconocido. Sin embargo, teniendo en cuenta el comportamiento de la función en las cercanías de ese instante – esto es: en un pequeño intervalo antes y después de las 14,00 horas - se encontró un “valor esperado” para la función.

e. Exprese analíticamente el valor esperado de la frecuencia cardíaca a las 14,00 horas.

f. ¿Puede asegurar cual fue la lectura a las 14,00 horas? ¿Cómo expresaría analíticamente la situación?



23. En una fábrica se obtiene un producto químico que posee como impureza el elemento tóxico plomo. El siguiente gráfico muestra el costo de purificación del producto químico ($) en función de la concentración de plomo (mg plomo por kg de producto).

   a. El límite máximo permitido de plomo en el producto por legislación es 3 mg de plomo por kg de producto. ¿Cuál es el costo de purificación por kg de producto para ese límite?

   b. ¿Cuál sería el costo si se quisiera purificar hasta 0,6 mg de plomo por kg? Y si se quisiera purificar hasta 0,2 mg de plomo por kg?

   c. ¿Se puede obtener el producto libre de plomo? ¿cuál sería su costo? Interprete analíticamente esta situación.