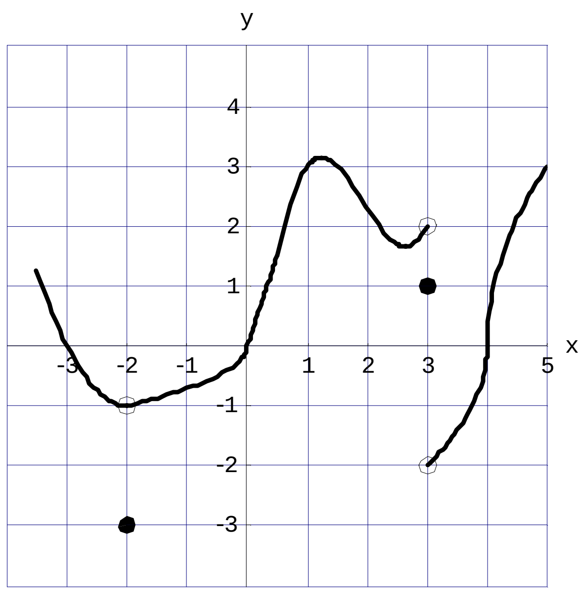
Trabajo Práctico 1: Límites y Derivadas

1) Exprese los siguientes entornos y/o intervalos como conjuntos de puntos.
   a) $[-1,3)$
   b) $(-1,+\infty)$
   c) $E'_{(-2,3)}$
2) Exprese los siguientes conjuntos de puntos como intervalo y, si es posible, como entorno. Grafique cada conjunto.
   a) $A = \{x \in R \,/\, |x - 5| < 7\}$
   b) $B = \{x \in R \,/\, |7 - x| \leq 6\}$
   c) $C = \{x \in R \,/\, |3x - 6| < 3\}$
   d) $D = \{x \in R \,/\, |5x - 5| \geq 10\}$
   e) $E = \{x \in R \,/\, 0 < |2 - x| < 3\}$

Sección 2.2

3) Explique con sus palabras qué significan las siguientes expresiones:
   a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.
      ¿Es posible que se cumpla esta proposición y f(2)=3? Dé una explicación.
   b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 7$.
      En esta situación, ¿es posible que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.
   c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$
   d) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$
4) Para la función f cuya gráfica se da, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.
   a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
   b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$
   c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$
   d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
   e) $f(3)$
   f) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$
   g) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$
   h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
   i) $f(-2)$



Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

5) Para la función f cuya gráfica se muestra, conteste a lo que se pide en cada inciso.

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

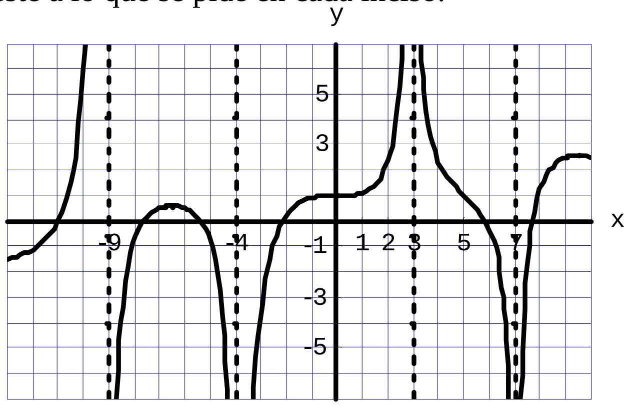
b) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -9^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -9^+} f(x)$

f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



6) Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=2, \quad \lim_{x\to 2} f(x)=2, \quad f(3)=3, \quad f(-2)=1.$$

7) Evalúe la función en los números dados correctamente hasta el sexto decimal. Use los resultados para conjeturar el valor del límite o explique porqué no existe.

$g(x)=\dfrac{x-1}{x^3-1}$; x = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9; 0,99; 1,8; 1,6; 1,4; 1,2; 1,1; 1,01;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$

8) Determine los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{6}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to 5^+} \ln(x-5)$

9) Determine $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1}$ como se indica en cada inciso.

a) Evaluando $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ para valores de x que se aproximen a 1 por la derecha y por la izquierda.

b) A partir de la gráfica de f.

10) a) Evalúe la función f dada por $f(x)=x^2-\dfrac{2^x}{1000}$ para x = 1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1 y 0,05, y estime el valor de

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2-\frac{2^x}{1000}\right)$$

b) Evalúe f(x) para x = 0,04; 0,02; 0,01; 0,005; 0,003 y 0,001. Vuelva a estimar el valor del límite anterior.

Sección 2.3

11) Dado que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} h(x)=8$,
encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to a} [f(x) + h(x)]$

b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^2$

c) $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{h(x)}$

d) $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$

e) $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$

f) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)}$

g) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

h) $\lim_{x \to a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

12) Evalúe el límite y justifique cada paso indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

a) $\lim_{x \to 4} \left(5x^2 - 2x + 3\right)$

b) $\lim_{x \to 3} \left(x^3 + 2\right)\left(x^2 - 5x\right)$

c) $\lim_{x \to -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

d) $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

13) Evalúe el límite, si existe.

a) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x + 12}{x + 3}$

b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{(h - 5)^2 - 25}{h}$

e) $\lim_{t \to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

14) Si $1 \le f(x) \le x^2 + 2x + 2$ para toda x, encuentre $\lim_{x \to -1} f(x)$.

15) Pruebe que $\lim_{x \to 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right] = 0$.

16) Encuentre el límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.

a) $\lim_{x \to -4} |x + 4|$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

17) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque ni $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$ existan.

Sección 2.4

18) Indique los puntos de acumulación e interiores de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in R \,/\, |x + 3| \ge 2\}$

b) $B = Z$

c) $A = \{x \in R \,/\, |x - 3| < 5\}$

d) $E'_{(-3,2)}$

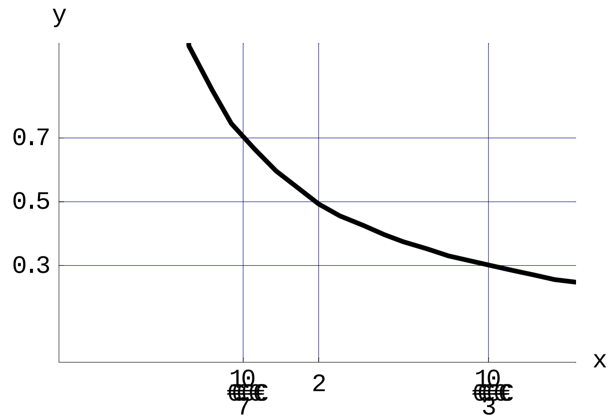
19) ¿Cuánto se debe acercar x a 2 para que 5x+3 quede a una distancia menor que a) 0,1 y b) 0,01 de 13?

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 1: Límites y Derivadas

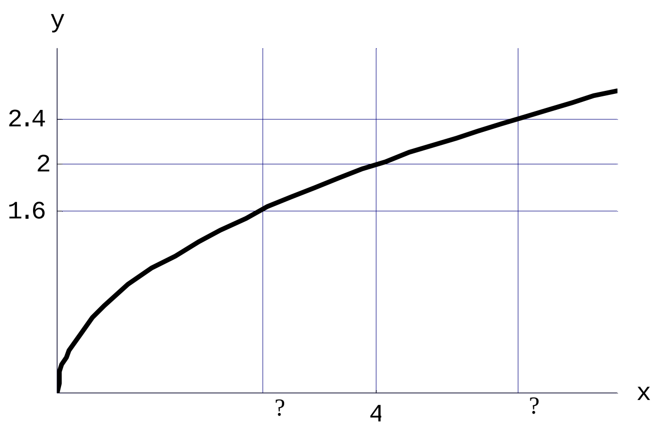
20) Con la siguiente gráfica de la función f dada por f(x) = 1/x, halle un número δ tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 2| < \delta .$$



21) Use la gráfica de la función f dada por $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$\left|\sqrt{x} - 2\right| < 0{,}4 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 4| < \delta .$$



22) Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones utilizando la definición de límite. En el inciso (j) realice, además, un diagrama representando ε y δ en el gráfico de la función.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to -5} \left(4 - \dfrac{3x}{5}\right) = 7$

c) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

d) $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 1) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -4} (x + 3)^2 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + x - 2) = -4$

h) $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$

i) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

j) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

23) Indique cuánto se debe acercar x a -3 para que $\dfrac{1}{(x+3)^4} > 10.000$.

24) Con la definición de límite infinito, pruebe que $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{(x+3)^4} = \infty$.

25) Demuestre:

a) Las siguientes propiedades de límites. Si c es una constante y existen los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces:

i) $\lim\limits_{x \to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to a} c\,f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

iv) $\lim\limits_{x \to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

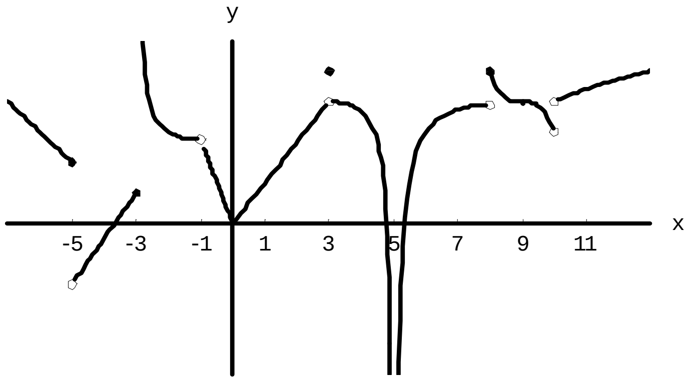
v) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

b) El teorema de la compresión.

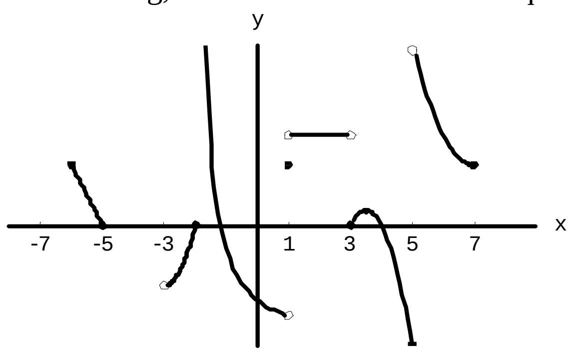
Sección 2.5

26) a) A partir de la gráfica de la función f, dé los valores de x en que f es discontinua y explique por qué.

b) Para cada uno de los valores de x que se den en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



27) A partir de la gráfica de la función g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

28) Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en x = 3, y sea continua desde la izquierda en 3.

29) Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

a) la función dada por $f(x) = \left(x + 2x^3\right)^4$ es continua en –1,

b) la función dada por $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en [-4,4].

30) Explique por qué la función es discontinua en el punto dado. Bosqueje la gráfica.

a) $f(x) = \ln|x - 2|$, a = 2.

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, a = –1.

31) Explique por qué la función es continua en todo punto en su dominio, aplicando los teoremas correspondientes. Dé el dominio.

a) $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

b) $h(x) = \sqrt{16 - x^2}\left(x^2 - 2\right)$

c) $f(x) = e^x \operatorname{sen} 5x$

32) Aplique la continuidad para evaluar el límite.

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

33) ¿Cuál de las siguientes funciones tiene una discontinuidad evitable en a? Si es evitable, halle una función g que coincida con f para todo x ≠ a y que sea continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, a = -2

b) $f(x) = \dfrac{x - 7}{|x - 7|}$, a = 7

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 64}{x + 4}$, a = -4

d) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$, a = 9

34) Suponga que una función f es continua sobre [0,1], excepto en 0,25 y que f(0) = 1 y f(1) = 3. Trace dos gráficas posibles de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio (considere N=2) y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema, aún cuando no satisfaga la hipótesis.

Sección 2.6

35) Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

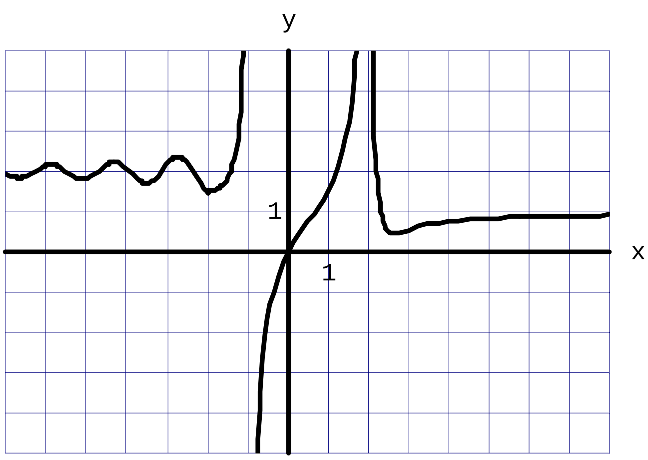
b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

f) Las ecuaciones de las asíntotas.



36) Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas en cada inciso.

a) f(0)=0, f(1)=1, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, f es impar.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

37) Evalúe el límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x^2-2x+5}$

b) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

38) Determine las asíntotas horizontales y verticales de cada curva. Compruebe su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

a) $y=\dfrac{x}{x+4}$

b) $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

39) Halle $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x-2)(1-x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(x-2)(1-x)$. Con esta información, y las coordenadas al origen, realice un esquema aproximado de la gráfica de la función.

40) Use el "teorema del emparedado" para evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

41) a) ¿De qué magnitud debe ser x para que $1/x^2 < 0,0001$?

c) Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$ a partir de la definición de límite.

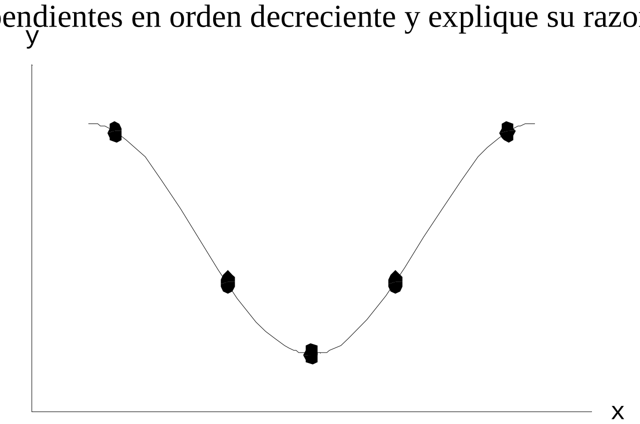
Sección 2.7

39) Una curva tiene la ecuación y = f(x).

a) Encuentre una expresión para la ecuación de la recta secante a la curva en los puntos P(3, f(3)) y Q(x, f(x)), siendo x un número real.

b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

40) Considere la pendiente de la curva en cada uno de los cinco puntos que se muestran en la gráfica. Enumere estas cinco pendientes en orden decreciente y explique su razonamiento.



41) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 2x$, en el punto $(-3,3)$.
   a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola del inciso (a), en el punto $(-3,3)$.
   b) Grafique ambas curvas.

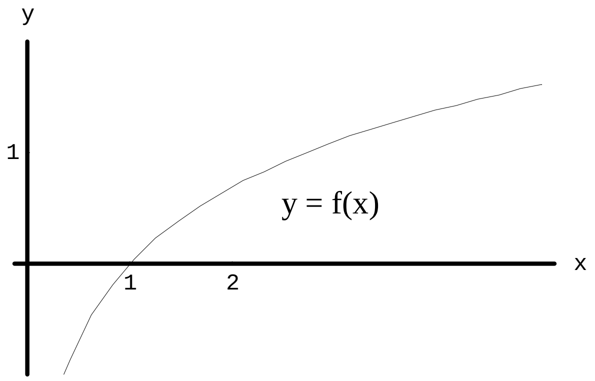
42) En cada caso, halle la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado.
   a) $y = 1 - 2x - 3x^2$, $(-2,-7)$.
   b) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$.

43) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 2/(x+3)$ en el punto $x = a$.
   a) Halle las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde x vale i) -1, ii) 0 y iii) 1.

44) Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos se expresa con $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

Sección 2.8

45) En la gráfica dada de f, represente $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h)-f(2)$ y h (Tome $h > 0$). ¿Cuál recta tiene la pendiente $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$?

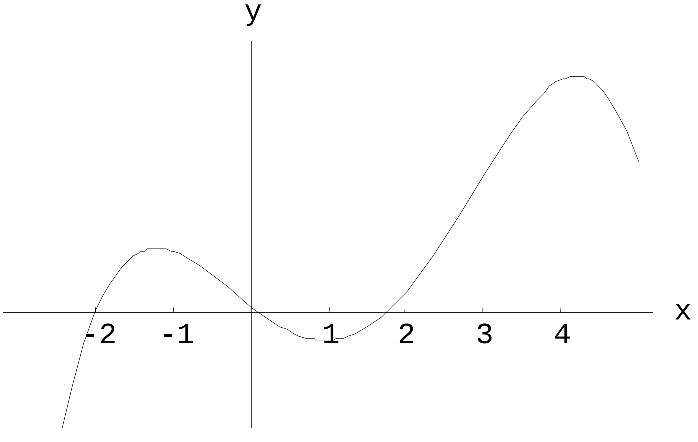


46) Para la función f cuya gráfica se muestra en el ejercicio anterior, disponga los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento:

$$0, \quad f'(2), \quad f(3)-f(2), \quad \frac{1}{2}\left[f(4)-f(2)\right].$$

47) Para la función g cuya gráfica se da, disponga los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento:

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

48) Si la recta tangente a $y = f(x)$, en (4,3), pasa por el punto (0,2), encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

49) Grafique una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

50) Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, encuentre $f'(2)$ y úsela para hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$, en el punto (2,2).

51) Encuentre $f'(a)$, si $f(x) = 1 + x - 2x^2$.

52) Cada límite representa la derivada de alguna función f, en algún número a. Establezca f y a en cada caso.

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x - 1}$

53) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación del movimiento $s(t) = t^2 - 6t - 5$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula cuando t = 2.

54) Determine si $f'(0)$ existe o no, sabiendo que

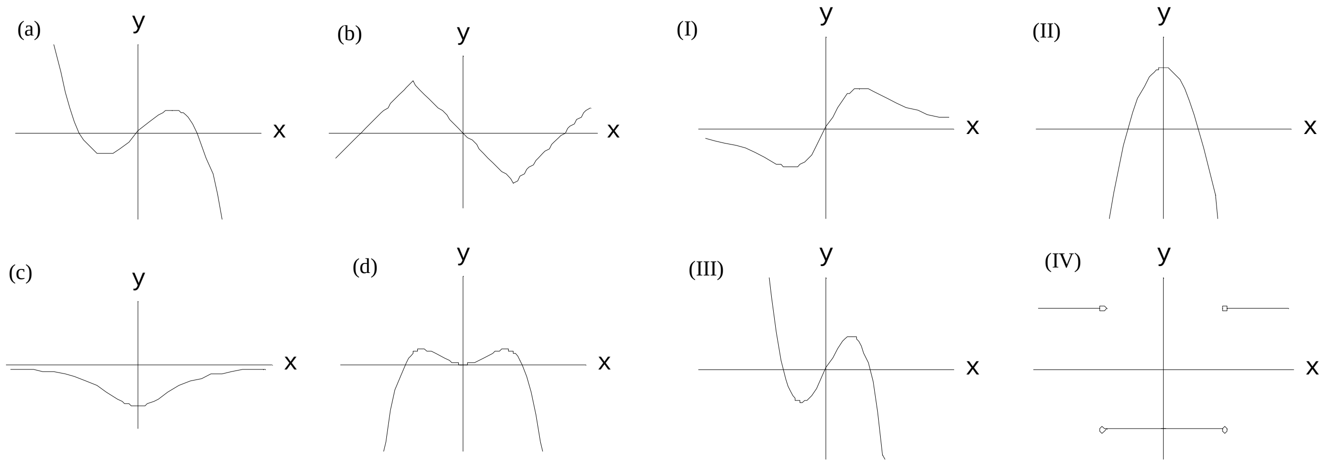
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sección 2.9

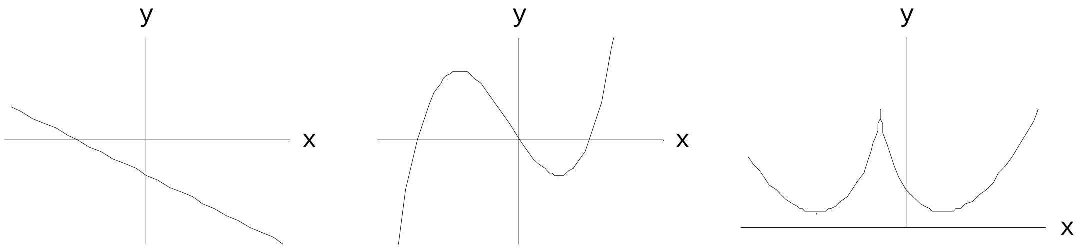
55) Use la gráfica dada para estimar el valor de cada derivada. Luego, grafique f'.

a) $f'(1)$
b) $f'(2)$
c) $f'(3)$
d) $f'(4)$

56) Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas (figs. I-IV). Dé las razones para sus selecciones.



57) A partir de la gráfica de la función f dada, suponiendo que los ejes tienen escalas iguales, trace la gráfica de f '.



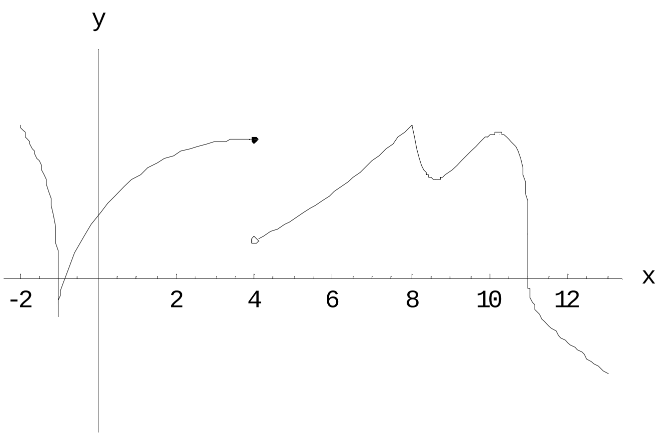
58) Trace una gráfica cuidadosa de la función f dada por f(x) = sen(x) y, debajo de ella, la gráfica de f '. ¿Puede conjeturar una fórmula para f '(x) a partir de su gráfica?

59) Sea $f(x) = x^2$.
a) Estime los valores de f '(0), f '(1/2), f '(1) y f '(2).
b) Aplique la simetría para deducir los valores de f '(-1/2), f '(-1) y f '(-2).
c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para f '(x).
d) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (c) es correcta.

60) Encuentre la derivada de la función f dada aplicando la definición. Dé dominios de la función y su derivada.
a) f(x) = 5x + 3
b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

61) a) Si f(x) = x – (2/x), encuentre f '(x).
b) Vea si su respuesta del inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f '.

62) Se da la gráfica de f. Indique los valores de x en que f no es diferenciable. Justifique su respuesta.



63) Demuestre que la función f dada por $f(x) = |x-6|$ no es diferenciable en 6. Encuentre una fórmula para f ' y trace su gráfica.

64) La derivada izquierda y la derivada derecha de una función f en a se definen como sigue:

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en caso de que existan estos límites. Entonces f '(a) existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

a) Halle $f'_{-}(4)$ y $f'_{+}(4)$ para la función f dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ 5-x & \text{si } 0<x<4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

b) Trace la gráfica de f.
c) ¿En qué valores es discontinua f?
d) ¿En qué valores la función f no es derivable?

Otros ejercicios también importantes

65) Demuestre que
   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.
   b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-l]=0$.
   c) De un ejemplo en el que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

66) Si f(x)<g(x) para todo x∈ℝ, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim\limits_{x\to a} f(x)<\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

67) Sean f,g: ℝ→ ℝ funciones y sea a∈ℝ. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existe.

68) De acuerdo a la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene una masa "m_o" cuando se mueve a la velocidad "v" tiene una masa dada por la expresión

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

donde c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede cuando $v\to c^-$?

69) En cada uno de los siguientes casos halle todos los números reales a y b tales que la función dada sea continua en todo ℝ.

a) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\le 2 \\ ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\le -1 \\ ax+b & \text{si } -1\le x\le 3 \\ -2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo