Trabajo Práctico 2: Reglas de derivación

Sección 3.1

1) Encuentre la derivada de la función f respecto de x en cada uno de los casos que se presentan a continuación:
   a) $f(x) = 5x - 1$
   b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
   c) $f(x) = x^{-2/5}$
   d) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
   e) $f(x) = 3x + 2e^x$
   f) $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$
   g) $f(x) = 4\pi^2$
   h) $f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

2) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x + \dfrac{4}{x}$ en el punto (2, 4). Ilustre graficando la curva y la tangente en el mismo par de ejes coordenados.

3) Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

4) Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4. Realice la gráfica de esta curva y de su derivada en el mismo par de ejes coordenados.

5) La **recta normal** a una curva C, en un punto P, es, por definición, la recta que contiene al punto P y es perpendicular a la recta tangente a C en P. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto (2, -3). Grafique la parábola y la recta normal.

6) Sea f una función dada por
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x > 1 \end{cases}$$
¿Es f derivable en el valor 1? Haga las gráficas de f y f′.

Sección 3.2

7) Encuentre la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Concuerdan sus resultados?

8) Derive la función f respecto de x o respecto de t, según corresponda.
   a) $f(x) = x^2e^x$
   b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$
   c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$
   d) $f(t) = \dfrac{4t+5}{2-3t}$
   e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

9) Escriba una ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2x}{x+1}$ en el punto (1, 1).

10) La curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ se llama **bruja de María Agnesi.**
   a) Encuentre una ecuación para la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.
   b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en el mismo par de ejes coordenados.

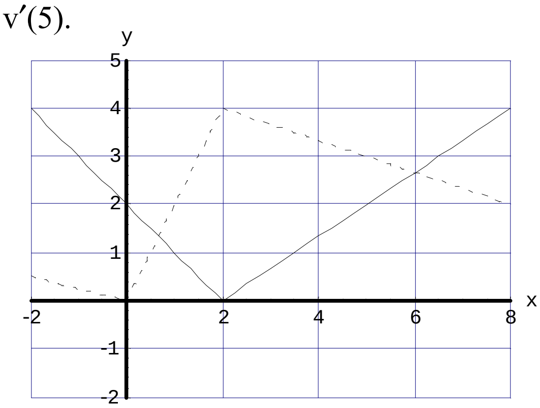
11) Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de:

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

a) $(f\,g)'(5)$ b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)$ c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(5)$

12) Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

13) Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Encuentre $u'(1)$ y $v'(5)$.



Sección 3.3

14) Una partícula se mueve según la ley de movimiento $s = f(t) = t^2 - 10t + 12$, $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.
   a) Encuentre la velocidad en el instante t.
   b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
   c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
   d) ¿Cuándo se mueve hacia delante?
   e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
   f) Dibuje un diagrama para ilustrar el movimiento de la partícula.

15) La función de posición de una partícula está dada por $s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t$, siendo $t \geq 0$. ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?

Sección 3.4

16) Encuentre la derivada de la función f respecto de x o de t, según corresponda, en cada uno de los casos que se presentan a continuación:
   a) $f(x) = x - 3\,\mathrm{sen}\,x$
   b) $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$
   c) $f(x) = \mathrm{sen}\,x + \cos x$
   d) $f(t) = t^3 \cos t$
   e) $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sen}x + \cos x}$

17) Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$.

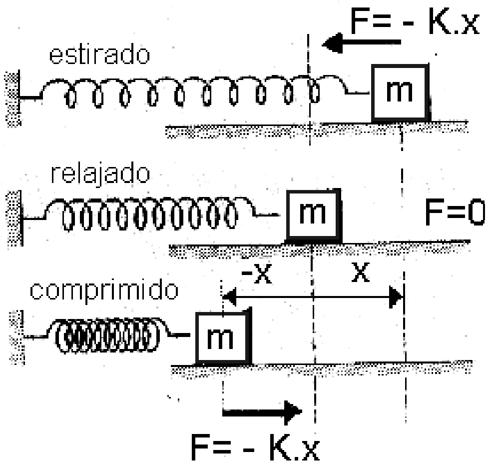
18) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan x$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$.

19) Derive la identidad trigonométrica $\tan x = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ para obtener una identidad nueva o conocida.

20) Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada. Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8\,\mathrm{sen}\,t$, donde t está en segundos y x en centímetros

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 2: Reglas de derivación



a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) Halle la posición y la velocidad de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se mueve en ese instante?

21) Halle los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}5t}{t}$ b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}8t}{\operatorname{sen}9t}$ c) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta-1}{\operatorname{sen}\theta}$ d) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot 2x}{\csc x}$

Sección 3.5

22) Derive aplicando la regla de la cadena:

a) $h(x) = (x^2 + 4x + 6)^5$
b) $h(x) = \cos(\tan x)$
c) $h(x) = e^{\sqrt{x}}$
d) $h(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$
e) $h(x) = \cos(a^3 + x^3)$
f) $h(y) = \left(\dfrac{y-6}{y+7}\right)^3$
g) $h(x) = e^{x \cos x}$

23) Halle todos los puntos de la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ en los que la recta tangente es horizontal.

24) Suponga $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$. Halle $F'(3)$.

25) El movimiento de un resorte sujeto a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como es el amortiguador de un automóvil) suele modelarse con el producto de una función exponencial y una función seno o coseno.
Suponga que la ecuación del movimiento de un punto de este resorte es $s(t) = 2e^{-1,5\,t}\operatorname{sen} 2\pi t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad en t segundos.

26) Use la regla de la cadena para demostrar lo siguiente:

a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

Sección 3.6

27) Dada la ecuación $x\,y + 2x + 3x^2 = 4$:

a) Encuentre y' por derivación implícita.
b) Resuelva la ecuación en forma explícita para y, y luego derive para obtener y' en términos de x.

c) Compruebe que sus soluciones para los incisos a) y b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso a).

28) Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita siendo y = f(x).

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x^2y + xy^2 = 3x$ c) $4 \cos x \text{ sen } y = 1$

29) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $\left(-5, \frac{9}{4}\right)$.

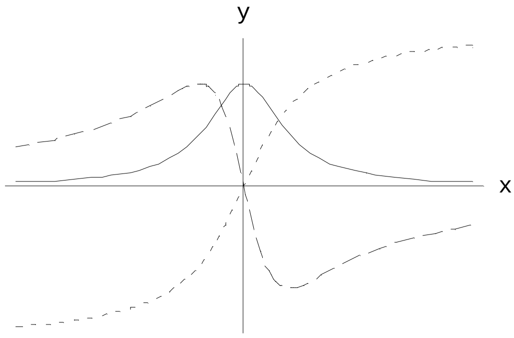
30) Halle la derivada de la función f en cada caso. Simplifique donde se pueda.

a) $f(x) = \text{sen}^{-1}(x^2)$ b) $f(x) = \tan^{-1}(e^x)$

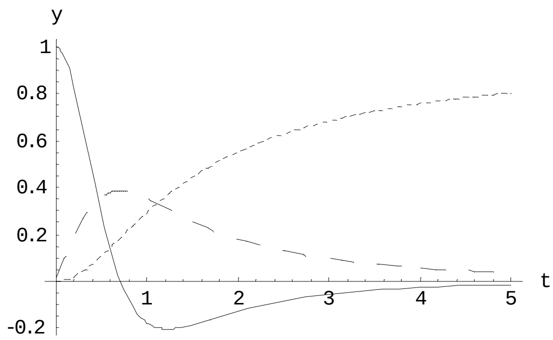
31) Demuestre que las curvas $2x^2 + y^2 = 3$; $x = y^2$ son ortogonales.

Sección 3.7

32) La figura que se presenta a continuación muestra las gráficas de f, f′, y f″. Identifique cada curva y explique sus elecciones.



33) La figura que sigue presenta las gráficas de tres funciones. Una es la función de posición de un automóvil; otra, la velocidad del mismo, y otra, su aceleración. Identifique cada curva y explique su elección.



34) Determine la primera y segunda derivada de la función f en cada uno de los casos que se presentan a continuación:

a) $f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$ b) $f(\theta) = \cos(2\theta)$ c) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

35) Determine la derivada tercera de $y = \sqrt{2x+3}$.

Trabajo Práctico 2: Reglas de derivación

36) Si $f(x) = (2 - 3x)^{-1/2}$, determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

37) Calcule la derivada segunda de $x^3 + y^3 = 1$ mediante derivación implícita.

38) Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$

39) Una partícula se mueve de acuerdo con una ley de movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, donde t es la medida en segundos y s en metros.

a) Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
b) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$.
c) ¿Cuándo aumenta la partícula su velocidad?¿Cuándo la reduce?

40) Una ecuación $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$ se llama *ecuación diferencial* porque involucra una función desconocida, en este caso y, y sus derivadas y' e y''. Encuentre las constantes A y B con las cuales la función $y = A \text{ sen } x + B \cos x$ satisfagan esta ecuación.

41) ¿Para qué valores de r satisface la función de ecuación $y = e^{r x}$ a la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

Sección 3.8

42) Derive la función f respecto de x o θ, según corresponda, en cada caso:

a) $f(x) = \ln(2 - x)$

b) $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$

c) $f(x) = \cos(\ln x)$

d) $f(x) = e^x \ln x$

43) Encuentre y' e y'' de $y = x \ln x$.

44) Aplique derivada logarítmica para hallar la derivada de y en cada caso:

a) $y = x^x$, siendo $x > 0$
b) $y = x^{\text{sen } x}$, siendo $x > 0$
c) $y = (\ln x)^{\cos x}$, siendo $x \geq 1$

45) Use la definición de derivada para probar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Sección 3.9

46) Calcule el valor numérico de cada expresión:

a) senh 0

b) cosh 0

c) tanh 0

d) tanh 1

e) senh (ln2)

f) senh 2

47) Demuestre cada una de las siguientes identidades:

a) senh(-x) = - senh x (con esto queda claro que senh es una función impar).
b) senh(2x) = 2 senh x cosh x.

48) Parta de las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh x$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \text{senh } x$

Trabajo Práctico 2: Reglas de derivación

49) Demuestre: $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

50) Determine la derivada de la función f respecto de x en cada caso:
   a) $f(x) = \mathrm{senh}(x^2)$.
   b) $f(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

51) Evalúe $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\mathrm{senh}\, x}{e^x}$

Sección 3.11

52) Determine la linealización L(x) de la función f en el punto a:
   a) $f(x) = x^3$, $a = 1$
   b) $f(x) = \ln x$, $a = 1$
   c) $f'(x) = e^{-2x}$, $a = 0$

53) Halle la diferencial de la función f en cada caso:
   a) $f(x) = x^4 + 5x$
   b) $f(x) = x \ln x$

54) Para cada caso halle la diferencial dy, y evalúela para los valores de x y dx que se especifican:
   a) $y = x^2 + 2x$, para $x = 3$ y $dx = ½$
   b) $y = \cos x$, para $x = \pi/6$ y $dx = 0{,}05$

55) Calcule Δy y dy para los valores de x y $dx = \Delta x$ que se especifican. Luego, haga un diagrama que muestre los segmentos rectilíneos de longitudes dx, dy y Δy.
   a) $y = x^2$, para $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}5$;
   b) $y = \sqrt{x}$, para $x = 1$ y $\Delta x = 1$.

Otros ejercicios importantes

56) Pruebe que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

57) Demuestre lo siguiente, partiendo de la definición (y trazando un dibujo explicativo):
   a) si g(x)=f(x) + c, entonces g'(x)=f '(x).
   b) Si g(x)=c f(x), entonces g'(x)=c f '(x).

58) Supóngase que f(a)=g(a)=h(a), que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x, y que f '(a)=h'(a). Demuestre que g es derivable en a y que f '(a)=g'(a)=h'(a). Ayuda: empiece con la definición de g'(a).
   a) Demuestre que la conclusión no se sigue si omitimos la hipótesis f(a)=g(a)=h(a).

59) Halle la fórmula para f '(x), siendo
   a) f(x)=sen(sen x)
   b) $f(x)=\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}\,x)+\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x^2)$
   c) $\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}\,x^2\,\mathrm{sen}^2 x^2$

60) Halle f '(0) si $f(x) = \begin{cases} g(x)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ y g(0)=g'(0)=0.

61) Si f+g es derivable en a, ¿son f y g necesariamente derivables en a? Si f·g y f son derivables en a, ¿qué condiciones para f implican que g sea derivable en a?

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo