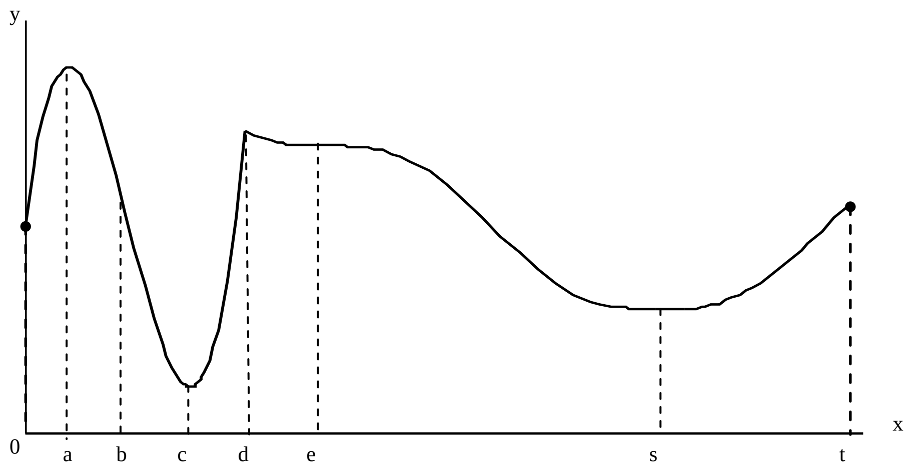
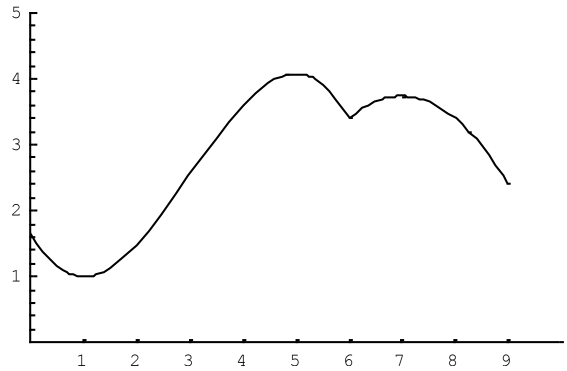
Trabajo Práctico 3: Aplicaciones de la derivación

Sección 4.1

1) Para cada uno de los números 0, a, b, c, d, e, s y t, diga si la función cuya gráfica se muestra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo relativos o no tiene máximo ni mínimo.



2) Utilice la gráfica de la función f para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de dicha función.



3) Dibuje la gráfica de una función que sea continua sobre [0,3] y tenga un máximo absoluto en 0, un mínimo absoluto en 3, un mínimo relativo en 1 y un máximo relativo en 2.

4) Trace la gráfica de una función sobre [-1,2] que tenga:
   a) Un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.
   b) Un máximo absoluto y un mínimo absoluto y sea discontinua.

5) En cada uno de los casos que se presentan a continuación, dibuje la gráfica de la función f y encuentre los máximos y mínimos relativos de la misma.
   a) $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geq 1$
   b) $f(x) = x^2, \quad -3 \leq x \leq 2$
   c) $f(\theta) = sen\ \theta, \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

6) Encuentre los números críticos de la función.
   a) $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$ b) $g(x) = |2x + 3|$ c) $f(x) = x\ ln(x)$

7) Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0,3]$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $[0,2]$

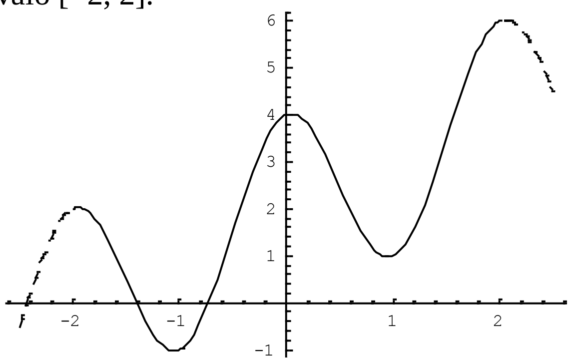
c) $f(x) = x\,e^{-x}$, $[0,2]$

Sección 4.2

8) Compruebe que la función f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,4]. A continuación determine todos los números c que satisfacen la conclusión de dicho teorema.

9) Sea $f(x) = (x-1)^{-2}$. Demuestre que $f(0) = f(2)$ pero no existe un número c en $(0,2)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

10) Emplee la gráfica de f para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo [–2, 2].



11) Sea $f(x) = |x-1|$. Demuestre que no hay un valor de c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)\,(3-0)$. ¿Por qué esto no contradice el del teorema del valor medio?

12) Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una raíz y sólo una.

13) Si f es una función tal que $f(1) = 10$, $f'(x)$ existe y $f'(x) \geq 2$ cuando $1 \leq x \leq 4$, ¿cuán pequeña puede ser $f(4)$?

14) ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para toda x?

15) Dos corredores arrancan al mismo tiempo en una competencia y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad. (Considere la siguiente sugerencia: defina $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.)

Sección 4.3

16) Use la gráfica de la función f para hallar lo siguiente.

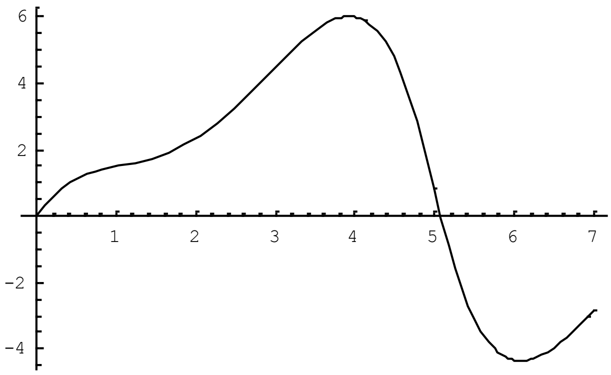
a) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde crece f.

b) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f decrece.

c) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia arriba.

d) Los mayores intervalos abiertos (en el sentido de la inclusión) donde f es cóncava hacia abajo.

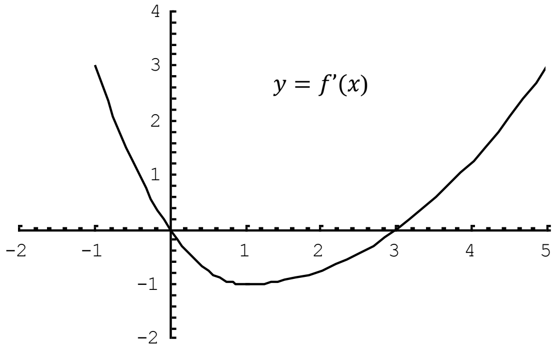
e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

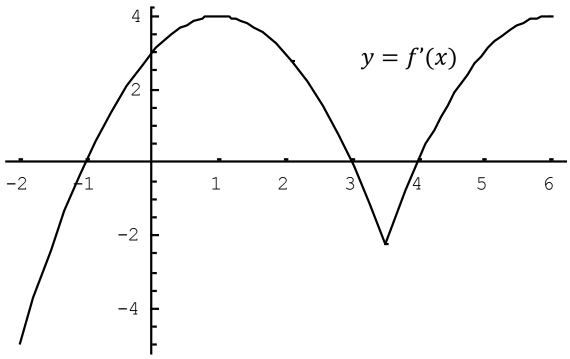


17) En cada uno de los casos que se presentan a continuación, se muestra la gráfica *de la derivada* f' de una función f. Responda:

a) ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?





18) En el gráfico que se muestra a continuación, aparece la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

a) ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

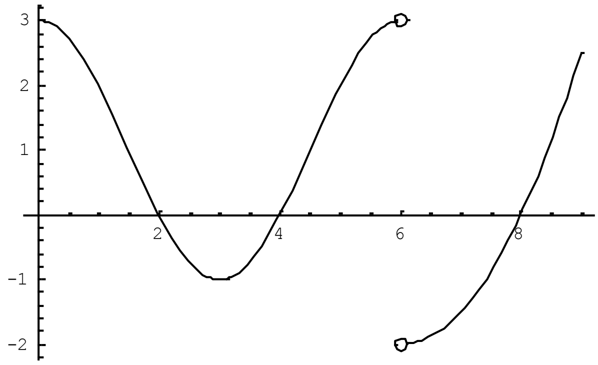
b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo relativo?

c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o abajo?

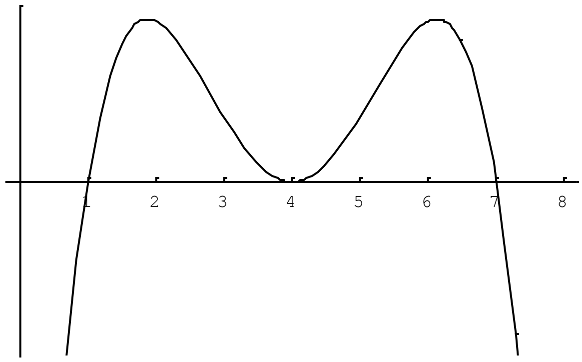
d) Defina las abscisas de los puntos de inflexión.

e) Sabiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo



19) Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Diga cuáles son las abscisas de los puntos de inflexión. Justifique su respuesta.



20) Para cada una de las funciones que se indican a continuación, halle:

a) Los intervalos en los que f es creciente o decreciente.
b) Los valores máximos y mínimos de f.
c) Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

i) $f(x) = x^3 - 12x + 1$
ii) $f(x) = x - 2sen\, x, \quad 0 < x < 3\pi$
iii) $f(x) = x\, e^x$

21) Trace la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:
$f'(-1) = f'(1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1, \quad f'(x) > 0\ si\, |x| > 1,$
$f'(x) > 0 \quad si\, |x| > 1, \quad f(-1) = 4, \qquad f(1) = 0,$
$f''(x) < 0 \quad si\ x < 0, \quad f''(x) > 0\ si\ x > 0.$

22) Para la función f dada por $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

a) Determine las asíntotas verticales y horizontales.
b) Halle los intervalos de crecimiento o de decrecimiento.
c) Encuentre los valores máximos y mínimos relativos.
d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
e) Use la información de los incisos (a) al (d) para bosquejar la gráfica de f.

23) Muestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero que el punto (0,0) no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

Sección 4.4

24) Supóngase que

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0, \qquad \lim_{x\to a} h(x)=1, \qquad \lim_{x\to a} p(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} q(x)=\infty$$

¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para los que no sean una forma indeterminada, evalúe el límite, si es posible hacerlo.

i)

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

ii)

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)p(x)]$ b) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)p(x)]$ c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)q(x)]$

iii)

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-p(x)]$ b) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)-q(x)]$ c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)+q(x)]$

iv)

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

25) Encuentre el límite aplicando la regla de L'Hopital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, úselo. Si no puede aplicar la regla de L'Hopital, explique por qué.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9-1}{x^5-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ h) $\lim\limits_{x\to \pi} (x-\pi)\operatorname{cotg} x$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$

26) Compruebe que valen las igualdades planteadas en (a) y (b).

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^n}=\infty$, para cualquier número entero n.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Considere un ejemplo (un valor determinado de n entero) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo.
Esta igualdad hace ver que la función exponencial tiende al infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^p} = 0$, para cualquier número $p > 0$.

Considere un ejemplo (un valor determinado de $p > 0$) y verifique que vale la igualdad para ese ejemplo.
Esta igualdad muestra que la función logarítmica tiende al infinito más despacio que cualquier potencia de x.

27) Demuestre la regla de L'Hopital cuando $x \to +\infty$, es decir si f y g son funciones derivables y se cumple que

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, ó

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

si el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Sección 4.5

28) Use los conocimientos adquiridos para trazar las siguientes curvas. Si la curva tiene una asíntota oblicua, dé su ecuación.

a) $y = x^4 + 4x^3$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

d) $y = x + 3x^{2/3}$

e) $y = x\, tgx$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

f) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

g) $y = e^x - x$

Sección 4.7

29) Considere el siguiente problema: Halle dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es máximo.

a) Haga una tabla de valores, como la siguiente, de modo que la suma de los números de las dos primeras columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia mostrada por la tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

b) Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con la respuesta del inciso (a).

30) ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 100 m de perímetro y área máxima posible?

31) ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con área de 1.000 m^2, y perímetro lo menor posible?

32) Un granjero quiere bordear un área de 1,5 millones de pies cuadrados en un campo rectangular y entonces dividirlo a la mitad con una barda paralela a un lado del rectángulo. ¿Cómo puede hacerlo para minimizar el costo de la barda?

33) Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32.000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

34) Si se cuenta con 1.200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo de la caja.

35) Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

36) Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

37) Una lata cilíndrica sin tapa se hace para contener V cm^3 de líquido. Halle las dimensiones que minimicen el costo del material usado.

Sección 4.10

38) Determine la antiderivada más general de cada una de las siguientes funciones. (Compruebe su respuesta mediante diferenciación.)

a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$ b) $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$ c) $f(t) = 3\cos(t) - 4\,sen(t)$

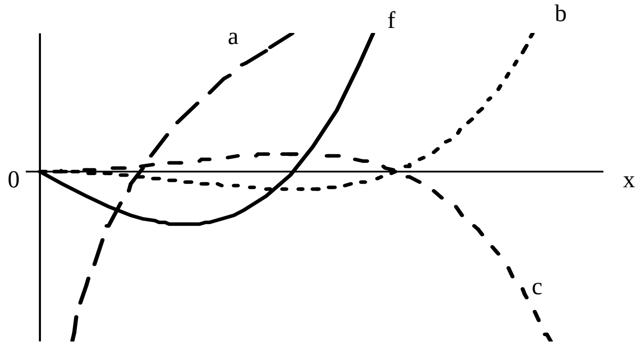
39) Encuentre la antiderivada F de la función f dada por $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, que satisfaga la condición $F(0) = 4$. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

40) Halle la función f con la información que se brinda en cada caso.

a) $f''(x) = 6x + 12x^2$ b) $f'''(t) = e^t$

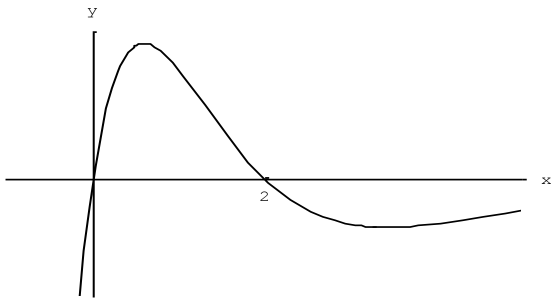
c) $f''(x) = x,\ f(0) = -3,\ f'(0) = 2$

41) Se muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál de las gráficas es la de la antiderivada de f y por qué?



Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

42) A continuación se presenta la gráfica de una función f. Bosqueje la gráfica de la antiderivada F, si $F(0) = 0$.



43) Un punto material se mueve de acuerdo con las ecuaciones dadas en cada caso. Encuentre su posición.

a) $v(t) = sen(t) - \cos(t)$, $s(0) = 0$

b) $a(t) = t - 2$, $s(0) = 1$, $v(0) = 3$

Ejercicios extras

44) Recuerde que una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

a) Demuestre que $y = 2 + e^{-x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 3x2y = 6x^2$.

b) Compruebe que $y = (2 + \ln x)/x$ es una solución del problema con valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y' + xy = 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

c) ¿Para cuáles valores de r la función $y = e^{rt}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 0$?

45) Demuestre que la suma de un número positivo y su recíproco es por lo menos 2.

46) a) Demuestre que si $f'(x) \geq M$ para todo x de [a,b], entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

b) Demuestre que si $f'(x) \leq m$ para todo x de [a,b], entonces $f(b) \leq f(a) + m(b-a)$.

47) a) Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

b) Muestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

48) Con respecto al movimiento vertical de un móvil, convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -9{,}8$.

a) Demuestre que s es de la forma $s(t) = -4{,}9\,t^2 + \alpha t + \beta$.

b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demuestre que

$$s(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t + s_0,$$

donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con cual se suelta.

c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

49) ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

(El límite es, en realidad, –4.)

50) Halle los límites: a) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$ y b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$.

51) De una pieza rectangular de cartón de 25 cm de largo y 10 cm de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

52) Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$, determine cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

53) Halle el o los puntos de la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ que estén más cerca del punto (0,2).

54) Un hombre se encuentra en un bote a 2 km del punto más cercano a la costa. Se dirige a un campamento localizado a 3 km costa arriba y 1 km tierra adentro. El hombre puede remar a 2 km/h y caminar a 4 km/h. ¿En qué punto de la costa debe desembarcar para llegar al campamento lo antes posible? ¿Cuánto tardará en llegar al campamento en ese caso?