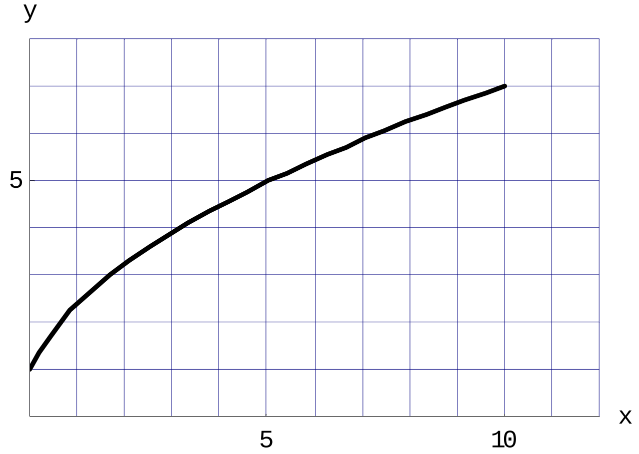
Trabajo Práctico 4: Integrales

Sección 5.1

1) Dada la siguiente gráfica de la función f:



a) Lea los valores a partir de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, desde x = 0 hasta x = 10. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.
b) Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos es cada caso.

2) Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Estime el área bajo la gráfica de f desde x = 1 hasta x = 5 con cuatro rectángulos de aproximación y tomando extremos derechos. Bosqueje la gráfica y los rectángulos. ¿Se trata de una subestimación o una sobreestimación?
b) Repita el inciso a) con extremos izquierdos.

3) Se muestra la gráfica de la velocidad de un móvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.

4) Use la definición de área de una región, como límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, con el fin de encontrar una expresión para área bajo la gráfica de f dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ entre x = 0 y x = 8. No evalúe el límite.

5) Determine una región cuya área sea igual a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{3}{n}\sqrt{1+\dfrac{3i}{n}}$. No lo evalúe.

Trabajo Práctico 4: Integrales

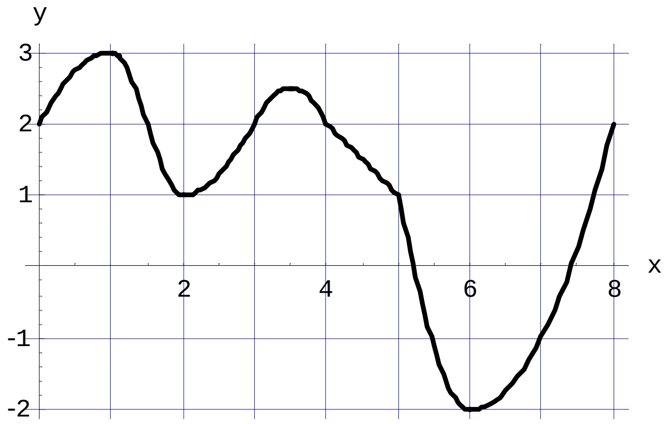
Sección 5.2

6) Evalúe la suma de Riemann para la función f dada por $f(x) = 2 - x^2$, $0 \le x \le 2$, con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Con la ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

7) Si la función f está dada por $f(x) = \ln x - 1$, $1 \le x \le 4$, evalúe la suma de Riemann con $n = 6$; tome los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. (Dé su respuesta correcta hasta seis decimales.) ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

8) Se da la gráfica de una función f. Estime $\int_0^8 f(x)dx$ usando cuatro subintervalos con:

a) los puntos extremos de la derecha;
b) los puntos extremos de la izquierda;
c) los puntos medios.



9) Se muestra una tabla de valores de una función creciente, f. Use la tabla para encontrar las estimaciones inferior y superior para $\int_0^{25} f(x)dx$.

x	0	5	10	15	20	25
f(x)	-42	-37	-25	-6	15	36

10) Exprese el $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{sen} x_i \, \Delta x$ como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$.

11) a) Encuentre una aproximación para la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ usando una suma de Riemann de extremos derechos y $n = 8$.

b) Dibuje un diagrama para ilustrar la aproximación del inciso a).

c) Use la ecuación $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$.

d) Interprete la integral del inciso c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama.

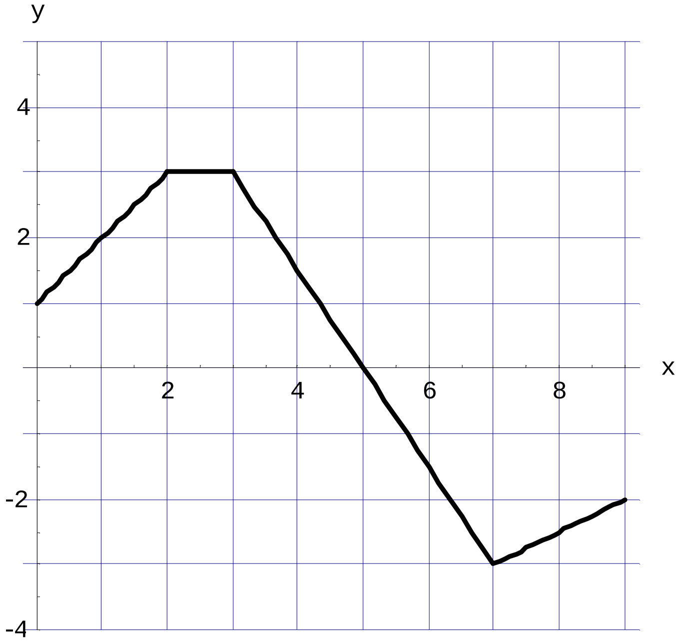
12) Pruebe que $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

13) Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 4: Integrales

a) $\int_0^2 f(x)dx$. b) $\int_0^5 f(x)dx$. c) $\int_5^7 f(x)dx$. d) $\int_0^9 f(x)dx$.



14) Evalúe $\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$ interpretándola en términos de áreas.

15) Sabiendo que $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, ¿cuánto vale $\int_9^4 \sqrt{t}\,dt$?

16) Evalúe $\int_1^1 x^2 \cos x\,dx$.

17) Use la información $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 \left(5-6x^2\right)dx$.

18) Escriba $\int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^{12} f(x)dx$ como una sola integral de la forma $\int_a^b f(x)dx$.

19) Si $\int_2^8 f(x)dx = 1,7$ y $\int_5^8 f(x)dx = 2,5$, halle $\int_2^5 f(x)dx$.

20) Use las propiedades de las integrales para verificar $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 x\,dx \le \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

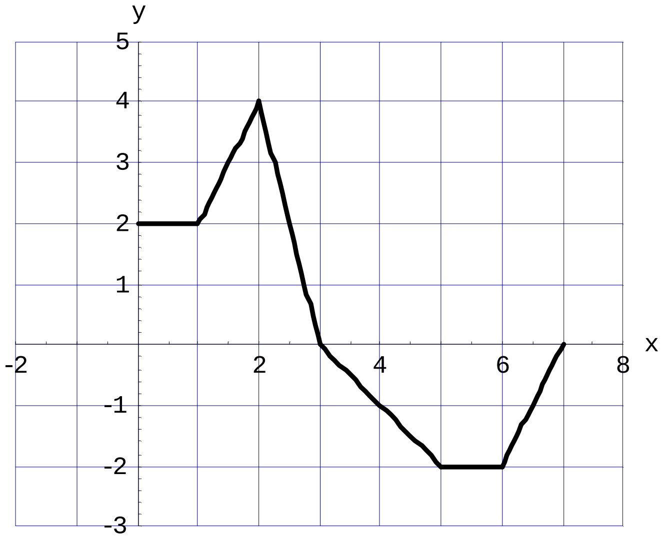
Sección 5.3

21) Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) Evalúe g(0), g(1), g(2), g(3) y g(6).
b) ¿Sobre qué intervalos g es creciente?
c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
d) Dibuje una gráfica aproximada de g.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 4: Integrales



22) Haga un esquema del área representada por $g(x)=\int_1^x t^2\,dt$. A continuación, encuentre $g'(x)$ de dos maneras:

a) Aplicando la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.
b) Evaluando la integral con la aplicación de la parte 2 del teorema fundamental del cálculo y, después, derivando.

23) Use la primera parte del teorema fundamental del cálculo para hallar la derivada de la función f en cada caso:

a) $f(x)=\int_0^x \sqrt{1+2t}\,dt$

b) $f(x)=\int_2^{1/x} \arctan t\,dt$

c) $f(x)=\int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$

d) $f(x)=\int_2^{\tan x} \arctan t\,dt$, con $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x)=\int_2^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2}\,dt$

f) $f(x)=\int_x^{x^3} \cos\left(t^2\right)\,dt$

g) $f(x)=\int_{\cos x}^{e^x} t^2\,dt$

24) Use la segunda parte del teorema fundamental del cálculo para evaluar las siguientes integrales; explique si no existe.

a) $\int_2^8 (4x+3)dx$

b) $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$

c) $\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx$

d) $\int_{-4}^2 \frac{2}{x^6}\,dx$

e) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen} t\,dt$

f) $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 4: Integrales

25) Use una gráfica para dar un estimado preliminar del área de la región por debajo de la curva $y = \text{sen } x$, $0 \le x \le \pi$. Luego, encuentre el área exacta.

26) Evalúe $\int_{-1}^{2} x^3 dx$ e interprete la diferencia de áreas. Ilustre con un bosquejo.

Sección 5.4

27) Verifique $\int x \cos x \, dx = x \, \text{sen } x + \cos x + C$ por derivación.

28) Halle la integral indefinida general en cada caso:

a) $\int \left(x^3 + 6x + 1\right) dx$

b) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

c) $\int (1 - t)\left(2 + t^2\right) dt$

d) $\int \left(3e^u + \sec^2 u\right) du$

29) Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{0} \left(2x - e^x\right) dx$

b) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int_{0}^{1} u\left(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}\right) du$

30) Dada la aceleración $a(t) = t + 4$ medida en m/s^2 y la velocidad inicial $v(0) = 5$ de una partícula que se mueve en línea recta. Halle:

a) La velocidad en el instante t.

b) La distancia recorrida durante el intervalo [0, 10].

Sección 5.5

31) Evalúe las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x^3 \left(1 - x^4\right)^5 dx$

b) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

c) $\int \cos(2\theta) \, d\theta$

d) $\int \cos^4 x \, \text{sen } x \, dx$

e) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

f) $\int x^5 \sqrt[3]{x^3 + 1} \, dx$

g) $\int \frac{1 + x}{1 + x^2} dx$

32) Evalúe las siguientes integrales definidas, en caso de existir:

a) $\int_{0}^{1} x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx$

b) $\int_{0}^{1/2} \frac{\text{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

c) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{2x + 3}$

d) $\int x \, e^{-x^2} dx$

e) $\int_{0}^{7} \sqrt{4 + 3x} \, dx$

f) $\int_{0}^{\pi/4} \text{sen}(4t) \, dt$

Otros ejercicios también importantes

33) Demuestre, usando la definición de integral definida, que $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

34) Obtenga, sin hacer cálculos, $\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

35) Compruebe con un gráfico que $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.

36) Verifique, estudiando varios ejemplos que, si f es integrable en [a,b], entonces $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

37) Determine lo pedido en cada caso.
   a) Halle f(x) tal que $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$.
   b) Halle g(x) tal que $g'(x) = x(\operatorname{sen} 5x)$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
   c) Halle h(x) tal que $h'(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$.

38) Sea f una función real derivable. Se sabe que f tiene un punto crítico en x=2, que el gráfico de f pasa por el punto (2,3) y que $f'(x) = -x + a$, para cierto número real a. Halle f(x).

39) Determine los máximos y mínimos locales de la función g definida por $g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4)dt$.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo