Trabajo Práctico 7: Técnicas de Integración

Sección 7.1

1) Evalúe cada una de las siguientes integrales:
   a) $\int xe^{2x}dx$.
   b) $\int (\ln x)^2 dx$.
   c) $\int e^{2\theta}\text{sen}3\theta\, d\theta$.
   d) $\int_0^1 te^{-t}dt$.
   e) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.
   f) $\int \cos(\ln x)dx$.
2) Primero haga una sustitución y después la integración por partes en la evaluación de $\int \text{sen}(\sqrt{x})dx$.
3) Calcule el área de la región limitada por las siguientes funciones: $y = \text{sen}^{-1}x$; $y = 0$; $x = 0{,}5$.

Sección 7.2

4) Evalúe cada una de las siguientes integrales:
   a) $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$.
   b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \text{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$.
   c) $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 3x\, dx$.
   d) $\int \cos^4 t\, dt$.
   e) $\int \frac{1-\text{sen}x}{\cos x}dx$.
   f) $\int \tan^2 x\, dx$.
   g) $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t \sec^2 t\, dt$.
   h) $\int \text{sen}5x\, \text{sen}2x\, dx$
5) Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \text{sen}^2x \cos^3x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Sección 7.3

6) Evalúe la integral usando la sustitución trigonométrica indicada. Dibuje y rotule el triángulo rectángulo asociado.
   a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$; $x = 3\sec\theta$.
   b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$; $x = 3\tan\theta$.
7) Evalúe cada una de las siguientes integrales:
   a) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx$.
   b) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt$.
   c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$.

Sección 7.4

8) Descomponga en fracciones parciales cada una de las funciones dadas. No determine los valores numéricos de los coeficientes.
   a) $\frac{3}{(2x+3)(x-1)}$.
   b) $\frac{1}{x^4-x^3}$.
9) Evalúe cada una de estas integrales:
   a) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$.
   b) $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

c) $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}dx$.

d) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

e) $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

10) Dada la integral $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$, haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y luego evalúe la integral.

11) Calcule el área de la región bajo la curva $y = \frac{x+1}{x-1}$, desde a = 2 hasta b = 3.

Sección 7.7

12) Estime $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ usando (a) la regla trapezoidal y (b) la regla del punto medio, cada vez con n = 4. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son estimaciones por defecto o por exceso. ¿Qué puede concluir del valor verdadero de la integral?

13) Use la regla del trapecio para aproximar $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx$ con n = 6. Redondee su respuesta a seis decimales.

14) Use (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto para aproximar $\int_1^2 e^{1/x}dx$ con n = 4. (Redondee a 6 decimales).

Sección 7.8

15) Explique por qué es impropia cada una de las integrales que se presentan a continuación:

a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}dx$.

b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$.

c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}dx$.

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5}dx$

16) Calcule el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^3}$, de x =1 a x = t y evalúela cuando t = 10, 100 y 1000. A continuación determine el área total bajo esta curva, para $x \geq 1$.

17) Señale si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalúe las convergentes.

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2}dx$.

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}dw$.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

d) $\int_0^{\infty} \cos x\, dx$.

e) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$.

f) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

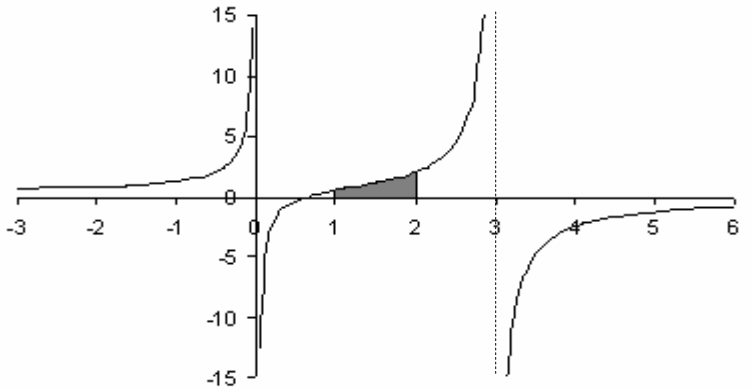
g) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$.

18) Bosqueje la región S = {(x, y)/ $x \le 1$, $0 \le y \le e^x$} y calcule su área (si esta es finita).

19) Aplique el teorema de comparación para determinar si la integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx$ es convergente o divergente.

Ejercicios

1) Halle el área de la superficie sombreada que se muestra en el siguiente gráfico, sabiendo que el mismo corresponde a la función f dada por $f(x) = \frac{-3x+2}{x^2-3x}$.



2) Calcule, si es posible, $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+3)^2} dx$, e indique qué representa.

3) Sea la función f dada por f(x)=cos x. Calcule el volumen del sólido que se obtiene cuando la superficie comprendida entre el gráfico de f y el eje x, para $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, gira alrededor del eje x.