Trabajo Práctico 9: Sucesiones y Series infinitas

Sección 11.1

1) Haga la lista de los cinco primeros términos de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$.
2) Halle la fórmula para el término general a_n de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots\right\}$, suponiendo que el patrón de los primeros términos continúa.
3) Si el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es L,
   a) ¿cuál es el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$? Justifique su respuesta.
   b) ¿cuál es el límite de la sucesión $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$? Justifique su respuesta.
4) Para cada uno de los siguientes casos, determine si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge. Si converge establezca el límite.
   a) $a_n = n\,(n-1)$.
   b) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$.
   c) $a_n = 2 + \cos(n\pi)$.
   d) $a_n = \sqrt[n]{b}$, siendo $b > 0$
   e) $a_n = \left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$.
   f) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5) Determine si la sucesión $\{a_n\}$ es creciente, decreciente o no monótona. ¿Es acotada?
   a) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$.
   b) $a_n = \cos(n\pi/2)$.
6) Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Pruebe que si para cierta función f vale que $f(n)=a_n$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Sección 11.2

7) a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
   b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?
8) Halle cuando menos 10 sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$. Grafique las sucesiones de términos y de sumas parciales en el mismo sistema de ejes coordenados. ¿Parece que la serie converge o diverge? Si es convergente, calcule la suma. Si es divergente, explique por qué.
9) Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$
   a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
   b) Determine si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
10) a) Explique la diferencia entre $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.
    b) Explique la diferencia entre $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} a_j$.

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

11) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ es convergente o divergente. En caso de que converja, calcule la suma.

12) Encuentre los valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ converge. Calcule la suma de la serie para esos valores de x.

13) ¿Por qué hay un error en este cálculo?

$0 = 0 + 0 + 0 + \ldots.$

$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots..$

$= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots.$

$= 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$

Sección 11.3

14) Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$. Mediante una gráfica ordene las tres cantidades siguientes en orden creciente:

$$\int_1^6 f(x)dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

15) Determine la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ por utilización de la prueba de la integral.

16) Determine si la serie $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \ldots$ es convergente o si es divergente.

17) Halle los valores de p para los cuales la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ es convergente.

Sección 11.4

18) Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos y que $\sum b_n$ es convergente.
   a) Si $a_n > b_n$ para todo n, ¿qué se puede decir de $\sum a_n$?¿Por qué?
   b) Si $a_n < b_n$ para todo n, ¿qué se puede decir de $\sum a_n$?¿Por qué?

19) Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos y que $\sum b_n$ es divergente.
   a) Si $a_n > b_n$ para todo n, ¿qué se puede decir de $\sum a_n$?¿Por qué?
   b) Si $a_n < b_n$ para todo n, ¿qué se puede decir de $\sum a_n$?¿Por qué?

20) Determine si la serie es convergente o bien si es divergente.
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$.
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$.
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 9: Sucesiones y Series infinitas

Sección 11.5

21) a) ¿Qué es una serie alternante?
 b) ¿En qué condiciones converge una serie alternante?
 c) Si estas condiciones se satisfacen, qué puede decir del residuo después de n términos.

22) Pruebe la convergencia o la divergencia de las series:
 a) $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\ldots$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{4n+1}$.

Sección 11.6

23) ¿Qué puede decir de la serie $\sum a_n$ en los casos siguientes?
 a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=8$. b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0{,}8$. c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

24) Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.
 a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^3}$. d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5+n}$.

Ejercicios:

25) Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión dada.
 a) Si $a_n\in[0,1]$ para todo n y $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n \in[0,1]$.
 b) Halle una sucesión convergente $\{a_n\}$ de puntos de (0,1), tal que $\lim_{n\to\infty} a_n \notin(0,1)$.

26) Pruebe que la serie armónica diverge.

27) Pruebe que la serie armónica alternada converge.

28) Pruebe que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series convergentes, entonces $\sum(a_n+b_n)$ también lo es.

29) Explique por qué los criterios de comparación y de la integral pueden aplicarse también a series de términos no positivos.

30) Pruebe la convergencia o divergencia de las series:
 a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.
 b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. (Sugerencia: prueba de la integral.)
 c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ (Sugerencia: prueba de comparación.)
 d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
 e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2}$. (Sugerencia: pruebe que es una serie de términos no negativos; prueba de comparación.)

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo

Trabajo Práctico 9: Sucesiones y Series infinitas

31) Aplicación a integrales:

a) Sea la función f: $[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=0,\\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{si } n-1<x\le n,\ n=1,2,3,\dots\end{cases}$$

Realice un esquema de la función; pruebe que la integral impropia $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

(Observe que f es una función integrable con un número infinito de discontinuidades.)

b) Sea la función g: $[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=0,\\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{si } \dfrac{1}{2^n}<x\le\dfrac{1}{2^{n-1}},\ n=1,2,3,\dots\end{cases}$$

Realice un esquema de la función; ¿cuánto vale la integral $\int_0^1 g(x)\,dx$?

(Observe que g es una función integrable con un número infinito de discontinuidades.)

32) Ana y Beatriz se encuentran a 20 km de distancia en línea recta una de otra y cada una anda en bicicleta con una rapidez constante de 10 km/h, dirigiéndose a su mutuo encuentro. Si una mosca, que vuela con una rapidez constante de 15 km/h, parte junto con Ana a hasta que se encuentra con Beatriz y en ese momento regresa, hasta encontrarse con Ana nuevamente y de esa manera sigue oscilando entre las amigas hasta que ellas se encuentran, ¿qué distancia recorre la mosca?

33) Carlos y Daniel son pintores. Carlos, más rápido, pinta una pared de ciertas dimensiones en 2 horas. Daniel, más lento, demora 4 horas en pintar una pared de iguales características.

a) Si juntos pintan una pared con las mismas características, en una hora Carlos ha pintado media pared y Daniel ha pintado un cuarto de la misma, es decir, que juntos han hecho ¾ del trabajo en una hora. Este mismo razonamiento se puede aplicar al cuarto restante: en ¼ de hora, Carlos pinta la mitad del cuarto restante y Daniel la cuarta parte del cuarto restante, de manera que para pintar ¾ + ¾ ¼ han demorado juntos 1h + 1/4 h. Siguiendo de esta manera se puede calcular el tiempo total que tardan juntos en pintar la pared. ¿Cuánto demoran?

b) Hay una forma mucho más simple de hallar el tiempo que tardan juntos en pintar la pared. ¿Se le ocurre cuál es?

Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Cuyo