Trabajo Practico Guiado

Objetivo:

Que el estudiante de introducción al algebra lineal incorpore los conceptos de matrices, tanto a través del aprendizaje y aplicación de la definición de matrices, comprender la manera de clasificarlas, además mediante el uso de métodos y reglas incorporar los procesos de las operaciones con matrices, siendo estos la suma, resta y multiplicación por un escalar. Que comprenda la relación entre las operaciones elementales que se pueden hacer entre filas y/o columnas dentro de una matriz a fin de resolver dichos procesos. Que aprenda a aplicarlas para resolver los productos entre matrices. Una vez asociados los conceptos anteriores y mediante la utilización del Método de Gauss y Gauss- Jordán le permita obtener la inversa de una matriz. Aprender el concepto de determinante de una matriz, cuáles son sus propiedades y como obtengo la inversa de una matriz a través del uso del determinante.

Clasificación y operaciones con matrices

Ejercicio 1. Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E(económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 modelos M y 10 modelos L de butacas; 12 modelos E, 8 modelos M y 5 modelos L de mecedoras; y 18 modelos E, 20 modelos M y 12 modelos L de sillas. Representa esta información en una matriz.

Solución

Para poder resolver este ejercicio y construir una matriz con los datos debemos hacer un análisis y ser capaces de cruzar los mismos entre sí.

Sabemos que:

- De Butacas (B) tenemos por mes: 20 E;15 M; y 10 L.
- De Mecedoras (Me) tenemos por mes: 12E; 8 M y 5 L.
- De Sillas (S) tenemos por mes : 18 E; 20 M y 12 L.

Ahora escribamos esto en formato matricial:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ Me \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nótese que se colocó como columnas de la matriz los modelos de cada producto que se producen mensualmente y como filas los productos realizados por la compañía.

Ejercicio 2. Obtiene la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.
Guías de resolución: Basándonos en la definición de matriz antisimetrica.

Ejercicio 3. Propone un ejemplo de una matriz de orden 4 que sea diagonal.
Guías de resolución: Basándonos en la definición de matriz diagonal.

Ejercicio 4. Coloca V o F según corresponde:

Guías de resolución: Basándonos en las definiciones de los diferentes tipos de matrices y las operaciones simples.

Ejercicio 5. Sea las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Efectúa cuando sean posible los siguientes cálculos:

a. B+C
b. A+(-C)
c. $B^T + C^T$
d. $A + B$
e. $A^T + (-D)$
f. D+(-D)
g. B+D

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos en la clasificación de matrices y en operaciones con matrices, resolveremos los ejercicios 5.c y 5.e a modo de ejemplo y el resto de los ejercicios los resolverá usted solo.

Que necesitamos previamente para poder resolver la operación:

- Matriz opuesta: Definición de matriz opuesta.
- Definición de matriz transpuesta.

Como primer punto a tener en cuanta debo saber que para poder realizar cualquier operación entre matrices estas deben tener el mismo orden, caso contrario la operación no puede ser realizada.

Ejercicio 5c

Debo calcular primero la transpuesta de ambas matrices, para calcular la matriz transpuesta se tendrá en cuenta que se intercambiaran los elementos de las filas que pasaran a ser elementos de las columnas, es decir el elemento a_{ij} se convertirá en el elemento a_{ji}.

1. Cálculo de B^T

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calculo de C^T

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Para realizar la operación de suma de dos o más matrices (A; B…) se deben sumar los elementos de las mismas que se encuentren en la misma posición, y se obtendrá una matriz C cuyas componentes serán los elementos sumados de las matrices correspondientes, en nuestro caso $B^T y\ C^T. Así$:

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

3. Calculo de $B^T + C^T$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 1+0 & 5+3 \\ 0+(-2) & 2+2 & (-1)+(-1) \\ 0+1 & 3+(-4) & 1+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} = B^T + C^T$$

Ejercicio 5e

Debo calcular la matriz opuesta de C, para calcularla se realiza la operación previa de multiplicar la matriz C por el escalar (-1). Y como sabemos esta operación implica multiplicar cada elemento de la matriz por dicho escalar.

1. Calculo de (-C)

$$-C = (-1) * \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)*3 & (-1)*-4 \\ (-1)*0 & (-1)*0 \\ (-1)*2 & (-1)*-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Cálculo de A+(-C)

$$A + (-C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & -1+4 \\ 0+0 & 3+0 \\ 1+(-2) & -3+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Efectué los siguientes cálculos:

a. D*C
b. C*I, siendo I la matriz identidad de orden 2.
c. $B^T * A$
d. $C^T * D$
e. A*0, siendo 0 la matriz nula de orden 3.

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos en la clasificación de matrices y en operaciones con matrices, resolvemos los ejercicios 6.a y 6.c.; a modo de ejemplo y el resto de los ejercicios los resolverá usted solo.

Que necesitamos previamente para poder resolver la operación:

- Matriz transpuesta. Definición.
- Matriz identidad.
- Matriz nula.

Como primer punto a tener en cuanta debo saber que para poder realizar una multiplicación de matrices debe cumplirse la siguiente condición: Sea A una matriz de orden **m*n** y B una matriz de orden **n*k.** Se define el producto **A*B** como una matriz **C**, que tendrá orden **m*k**; para obtener los elementos componentes de la matriz respuesta, se realizan estas operaciones.

Ejemplo (propuesto):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que el orden de A es **2*3** (fila- columna) y el orden de B es **3*2**, al realizar el producto la respuesta debería ser una matriz cuyo orden sea dado por el numero de filas de A y el de columnas de B, luego el orden será **2*2.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz C serán calculados de la siguiente forma:

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{12} + a_{13} * b_{13} =$$

Y así repetir la formula con cada elemento de C

$$A * B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

Luego los elementos de nuestra matriz ejemplo serán:

$$c_{11} = 2 * 1 + 1 * 2 + 3 * 1 = 7$$

$$c_{12} = 2 * 2 + 1 * 1 + 3 * 0 = 5$$

$$c_{21} = 4 * 1 + 0 * 2 + 1 * 1 = 5$$

$$c_{22} = 4 * 2 + 0 * 1 + 1 * 0 = 8$$

Reemplazando:

$$A * B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Primero debemos verificar si es posible resolver el producto, entonces la matriz D es de orden 2*2 y el orden de C es 2*2, de lo antes explicado si debe deducir que para poder realizar el producto la cantidad de columnas de D debe ser igual que la cantidad de filas de C, como esto sucede procedemos a hacer la multiplicación.

La matriz respuesta por lo dicho tendrá un orden 2*2

$$D * C =* \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

1. <u>Calculo c_{ij}</u>

$$c_{11} = 2 * 4 + 5 * 2 = 18$$

$$c_{12} = 2 * (-6) + 5 * 1 = -7$$

$$c_{21} =* 4 + 0 * 2 = -12$$

$$c_{22} = (-3) * (-6) + 0 * 1 = 18$$

2. Resolvemos el producto

Una vez resuelto los coeficientes c_{ij} reemplazamos en la posición que corresponda:

$$*C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -7 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6c

Para poder calcular este producto primero debemos calcular la transpuesta de B

1. Cálculo de B^T

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tratarse de una matriz diagonal su transpuesta es igual a la matriz original.

NOTA: Se coloco este calculo en le proceso a fin de que se entienda que todas estas operaciones deben resolverse previo a realizar el producto.

2. Verificación de los órdenes de las matrices

El orden de B^T es **3*3** y el orden de A es **3*3**, la matriz resultante será entonces de **3*3.**

$$B^T * A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

3. Cálculo de los coeficientes c_{ij}

$$c_{11} = (-2) * 3 + 0 * 1 + 0 * 2 = -6$$

$$c_{12} = (-2) * (-2) + 0 * 1 + 0 * (-1) = 4$$

$$c_{13} = (-2) * 0 + 0 * (-4) + 0 * 0 =$$

$$c_{21} = 0 * 3 + 1 * 1 + 0 * 2 = 1$$

$$c_{22} = 0 * (-2) + 1 * 1 + 0 * (-1) = 1$$

$$c_{23} = 0 * 0 + 1 * (-4) + 0 * 0 = -4$$

$$c_{31} = 0 * 3 + 0 * 1 + 3 * 2 = 6$$

$$c_{32} = 0 * (-2) + 0 * 1 + 3 * (-1) = -3$$

$$c_{33} = 0 * 0 + 0 * (-4) + 3 * 0 = 0$$

4. Resolvemos el producto

$$B^T * A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7. Dadas las siguientes matrices, M y P; compruebe que

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \; y \; P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

a. $(M+P)^T = M^T + P^T$.
b. $(3M)^T = 3 * M^T$.
c. $(M * P)^T = P^T * M^T$

Guías de resolución: Basándonos en las definiciones de los diferentes tipos de matrices y las operaciones simples

Ejercicio 8. Hallar las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix} \\ X+Y=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{cases}$$

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos en la clasificación de matrices y en operacione con matrices, para poder resolver este sistema vamos a plantear el sistema de ecuaciones con las correspondientes operaciones matriciales. Para resolver este ejercicio existen dos maneras de plantear la solución:

Primera forma de planteo

1. Resolvemos la primera ecuación
   Para resolver esta primera ecuación realizamos las operaciones matriciales correspondientes:
   - Producto de una matriz por un escalar.
   - Suma de matrices

$$2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

a. Definimos las matrices X e Y

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\ y\ Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}$$

b. Reemplazamos en la ecuación

$$2*\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

c. Realizamos las operaciones

$$\begin{bmatrix}2x_1+y_1 & 2x_2+y_2\\ 2x_3+y_3 & 2x_4+y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

De allí se forman 4 expresiones

$$2x_1+y_1=1$$
$$2x_2+y_2=4$$
$$2x_3+y_3=2$$
$$2x_4+y_4=0$$

2. Resolvemos la segunda ecuación

$$x_1+y_1=1$$
$$x_2+y_2=-1$$
$$x_3+y_3=1$$
$$x_4+y_4=0$$

3. Planteamos cada sistema resolución

$$\begin{cases}2x_1+y_1=1\\ x_1+y_1=1\end{cases} \qquad \begin{cases}2x_2+y_2=4\\ x_2+y_2=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x_3+y_3=2\\ x_3+y_3=1\end{cases} \qquad \begin{cases}2x_4+y_4=0\\ x_4+y_4=0\end{cases}$$

$$x_4=-y_4 \Rightarrow 2*(-y_4)+y_4=0 \Rightarrow -y_4=0 \Rightarrow y_4=0 \Rightarrow x_4=0$$

$$x_3=1-y_3 \Rightarrow 2*(1-y_3)+y_3=2 \Rightarrow 2-2y_3+y_3=2 \Rightarrow 2-y_3=2 \Rightarrow -y_3=0 \Rightarrow$$

$y_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$

$x_2 = -1 - y_2 \Rightarrow 2 * (-1 - y_2) + y_2 = 4 \Rightarrow -2 - 2y_2 + y_2 = 4 \Rightarrow -2 - y_2 = 4 \Rightarrow$

$-y_2 = 4 + 2 \Rightarrow y_2 = -6 \Rightarrow x_2 = 5$

$x_1 = 1 - y_1 \Rightarrow 2(1 - y_1) + y_1 = 1 \Rightarrow 2 - 2y_1 + y_1 = 1 \Rightarrow 2 - y_1 = 1 \Rightarrow$

$-y_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

4. Reemplacemos los valores obtenidos

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; Y = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segunda forma de planteo

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ X + Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X + Y = B \\ X + Y = A \end{cases}$$

1. Resolvemos el sistema de ecuaciones

   Para resolver el sistema:

   - ✓ Tomamos la segunda expresión y despejamos Y

$$Y = A - X$$

   - ✓ Sustituimos Y en la primera expresión:

$$\begin{gathered} 2X + (A - X) = B \\ 2X + A - X = B \\ 2X - X = B - A \\ X = B - A \end{gathered}$$

   - ✓ Realizamos la operación entre las matrices A y B

$$X = B - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   - ✓ Reemplazamos la matriz obtenida en la ecuación de Y, y operamos

$$Y = A - X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9. Aplicando la definición de matriz inversa, encuentra, si es posible, la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 9 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos en operaciones con matrices y partiendo de la definición de la matriz inversa, podemos resolver el ejercicio planteado. A modo de ejemplo se resolverá la matriz inversa de la matriz E.

Que necesitamos previamente para poder resolver la operación:}

- Definición de matriz identidad.

- Multiplicación entre matrices.
- Definición de matriz inversa.

Para poder resolver el ejercicio propuesto debemos recordar la definición de matriz inversa, sea:

$$A * B = B * A = I$$

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$$

Como ya sabemos multiplicar matrices, el procedimiento que debemos realizar es encontrar una matriz tal que el producto entre esta y nuestra matriz dato (en nuestro caso E), de como resultado la matriz identidad correspondiente. A partir de ahora llamaremos a la matriz incógnita E^{-1}.

$$E * E^{-1} = E^{-1} * E = I$$

Para poder realizar el producto habrá que revisar los números de orden de las matrices intervinientes. El orden de E es 3*3, el orden de la matriz identidad debe ser 3*3, por ello y por lo que sabemos del producto del orden de E^{-1} debe ser 3*3.

Llamaremos a

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$E * E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 9 & 15 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando realicemos las operaciones; encontraremos un conjunto de expresiones algebraicas que al resolverse nos irán respondiendo los coeficientes dentro de la matriz E^{-1}.

Para simplificar el proceso, y como el alumno ya sabe multiplicar solo plantearemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + 2d + g = 1 \\ 9a + 15d + 2g = 0 \\ -3a - 5d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2e + h = 0 \\ 9b + 15e + 2h = 0 \\ -3b - 5e = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c + 2f + i = 0 \\ 9c + 15f + 2i = 1 \\ -3c - 5f = 0 \end{cases}$$

1. <u>Resolvamos el primer sistema</u>

$$\begin{cases} a + 2d + g = 1 \\ 9a + 15d + 2g = 0 \\ -3a - 5d = 0 \end{cases}$$

$$-3a - 5d = 0 \Rightarrow -5d = 3a \Rightarrow d = -\frac{3}{5}a$$

$$9a + 15(-\frac{3}{5}a) + 2g = 0 \Rightarrow 9a + 3(-3a) + 2g = 0 \Rightarrow$$

$$9a + (-9a) + 2g = 0 \Rightarrow 2g = 0 \Rightarrow g = 0$$

$$a + 2d + g = 1 \Rightarrow a + 2(-\frac{3}{5}a) + 0 = 1 \Rightarrow a + (-\frac{6}{5}a) = 1 \Rightarrow (-\frac{1}{5}a) = 1 \Rightarrow$$

$$a = -5 \Rightarrow d = -\frac{3}{5}(-5) \Rightarrow d = 3$$

2. Resolvamos el segundo sistema

$$\begin{cases} b+2e+h=0 \\ 9b+15e+2h=0 \\ -3b-5e=1 \end{cases}$$

$$-3b-5e=1 \Rightarrow -3b=1+5e \Rightarrow b=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}e$$

$$9\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}e\right)+15e+2h=0 \Rightarrow -3-15e+15e+2h=0 \Rightarrow -3+2h=0 \Rightarrow$$

$$2h=-3 \Rightarrow h=-\frac{3}{2}$$

$$b+2e+h=0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}e\right)+2e\pm\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}e-\frac{11}{6}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}e=\frac{11}{6} \Rightarrow$$

$$e=\frac{11}{2}$$

$$b=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{11}{2}\right) \Rightarrow b=-\frac{19}{2}$$

3. Resolvamos el tercer sistema

$$\begin{cases} c+2f+i=0 \\ 9c+15f+2i=1 \\ -3c-5f=0 \end{cases}$$

$$-3c-5f=0 \Rightarrow -5f=3c \Rightarrow f=-\frac{3}{5}c$$

$$9c+15(-\frac{3}{5}c)+2i=1 \Rightarrow 9c+(-9c)+2i=1 \Rightarrow i=\frac{1}{2}$$

$$c+2(-\frac{3}{5}c)+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow c+(-\frac{6}{5}c)+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (-\frac{1}{5}c)+\frac{1}{2}=0$$

$$\left(-\frac{1}{5}c\right)+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}c\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

$$f=-\frac{3}{5}c \Rightarrow f=-\frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f=-\frac{3}{2}$$

4. Reconstrucción de E^{-1}

$$E^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -\frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. Analice, en cada caso, si la matriz A es ortogonal:

Guías de resolución: Basándonos en las definiciones de matriz ortogonal. $A^{-1}=A^T$

a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ejercicio 11 En cada uno de los siguientes ítems, determina todas las matrices B que verifican la ecuación dada.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 12. Determina cuales de las siguientes matrices son inversibles, y en caso afirmativo calcula su inversa aplicando método de Gauss- Jordán

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

e. $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos anteriormente, podemos resolver el ejercicio planteado.
A modo de ejemplo se resolverá el Ejercicio 12 d.
Que necesitamos previamente para poder resolver la operación:

- Definición de matriz identidad.
- Operaciones elementales
- Método de Gauss- Jordán

Las operaciones elementales que se realizan entre filas dentro de una matriz, para obtener matrices equivalentes son 3:

1) Se permite permutar o intercambiar dos filas entre si
2) Se permite multiplicar todos los elementos de una fila por un escalar $k \neq 0$

3) Se permite sumar los elementos de una fila a otra paralela a ella, previamente multiplicadas por un escalar $k \neq 0$

Dada la matriz D, hallaremos la matriz inversa por el método de Gauss- Jordán; dicho método implica que a través de operaciones elementales trabajar con la matriz D y la matriz identidad y así obtener la inversa de D.

Nota: De ahora en adelante denominaremos a las filas de la matriz F_i

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pasos

1. Elegimos el primer elemento de la fila F_1 como elemento PIVOTE. Y dividimos todos los elementos de la fila por el conjugado del elemento pivote, y obtenemos una nueva fila $F_1{}^*$. $F_1{}^* = \frac{1}{2} * F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Multiplicamos la $F_1{}^*$. por 3. Y se la restamos a F_3. $F_3{}^* = F_3 - 3 * F_1{}^*$

$d^*{}_{31} = d_{31} - 3 * d^*{}_{11} = 3 - (3 * 1) = 0 \quad i^*{}_{31} = i_{31} - 3 * i^*{}_{11} = 0 - \left(3 * \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

$d^*{}_{32} = d_{32} - 3 * d^*{}_{12} = 1 - \left(3 * \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad i^*{}_{32} = i_{32} - 3 * i^*{}_{12} = 0 - (3 * 0) = 0$

$d^*{}_{33} = d_{33} - 3 * d^*{}_{13} = -1 - \left(3 * \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \quad i^*{}_{33} = i_{33} - 3 * i^*{}_{13} = 1 - (3 * 0) = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. A la fila $F_1{}^*$ le sumaremos la $F_3{}^*$ y esta será mi $F_1{}^{**}$. $F_1{}^{**} = F_1{}^* + F_3{}^*$

$d^{**}{}_{11} = d^*{}_{11} + d^*{}_{31} = 1 + 0 = 1 \quad i^{**}{}_{11} = i^*{}_{11} + i^*{}_{31} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

$d^{**}{}_{12} = d^*{}_{12} + d^*{}_{32} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad i^{**}{}_{12} = i^*{}_{12} + i^*{}_{32} = 0 + 0 = 0$

$d^{**}{}_{13} = d^*{}_{13} + d^*{}_{33} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) = -2 \quad i^{**}{}_{13} = i^*{}_{13} + i^*{}_{33} = 0 + 1 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. A la fila $F_3{}^*$ le sumamos $\frac{1}{2} * F_2$ y obtenemos una nueva fila. $F_3{}^{**} = F_3{}^* + \frac{1}{2} F_2$

$d^{**}{}_{31} = d^*{}_{31} + \frac{1}{2} d_{21} = 0 + \frac{1}{2} 0 = 0 \quad i^{**}{}_{31} = i^*{}_{31} + \frac{1}{2} i_{21} = -\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} * 0\right) = -\frac{3}{2}$

$d^{**}{}_{32} = d^{*}{}_{32} + \frac{1}{2} d_{32} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad i^{**}{}_{32} = i^{*}{}_{32} + \frac{1}{2} i_{32} = 0 + \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2}$

$d^{**}{}_{33} = d^{*}{}_{33} + \frac{1}{2} d_{23} = -\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2} * 1\right) = -2 \quad i^{**}{}_{33} = i^{*}{}_{33} + \frac{1}{2} i_{23} = 1 + \frac{1}{2} 0 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

5. A $F_1{}^{**}$ le restamos $F_3{}^{**}$ y obtenemos una nueva fila. $F_1{}^{***} = F_1{}^{**} - F_3{}^{**}$.

$d^{***}{}_{11} = d^{**}{}_{11} - d^{**}{}_{31} = 1 - 0 = 1 \quad i^{***}{}_{11} = i^{**}{}_{11} - i^{**}{}_{31} = (-1) - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$d^{***}{}_{12} = d^{**}{}_{12} - d^{**}{}_{32} = 0 - 0 = 0 \quad i^{***}{}_{12} = i^{**}{}_{12} - i^{**}{}_{32} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$d^{***}{}_{13} = d^{**}{}_{13} - d^{**}{}_{33} = (-2) - (-2) = 0 \quad i^{***}{}_{13} = i^{**}{}_{13} - i^{**}{}_{33} = 1 - 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

6. Multiplicamos $F_3{}^{**}$ por $-\frac{1}{2}$ y tendremos $F_3{}^{***} = -\frac{1}{2} * F_3{}^{**}$

$d^{***}{}_{31} = (-\frac{1}{2}) * d^{**}{}_{31} = -\frac{1}{2} * 0 = 0 \quad i^{***}{}_{31} = \left(-\frac{1}{2}\right) i^{**}{}_{31} = \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$d^{***}{}_{32} = \left(-\frac{1}{2}\right) * d^{**}{}_{32} = -\frac{1}{2} * 0 = 0 \quad i^{***}{}_{32} = \left(-\frac{1}{2}\right) * i^{**}{}_{32} = \left(-\frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$d^{***}{}_{33} = \left(-\frac{1}{2}\right) * d^{**}{}_{33} = \left(-\frac{1}{2}\right) * (-2) = 1 \quad i^{***}{}_{33} = \left(-\frac{1}{2}\right) * i^{**}{}_{33} = \left(-\frac{1}{2}\right) * 1 = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

7. A la F_2 le restamos la $F_3{}^{***}$ y obtenemos $F_2{}^{*}$. $F_2{}^{*} = F_2 - F_3{}^{***}$

$d^{*}{}_{21} = d_{21} - d^{***}{}_{31} = 0 - 0 = 0 \quad i^{*}{}_{21} = i_{21} - i^{***}{}_{31} = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

$d^{*}{}_{22} = d_{22} - d^{***}{}_{32} = 1 - 0 = 1 \quad i^{*}{}_{22} = i_{22} - i^{***}{}_{32} = 1 - (-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$

$d^{*}{}_{23} = d_{23} - d^{**}{}_{33} = 1 - 1 = 0 \quad i^{*}{}_{23} = i_{23} - i^{***}{}_{33} = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 13. Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que $\boldsymbol{A^2 + A + I = 0}$. Demuestre que A es inversible y que $\boldsymbol{A - I = -A - I}$.

Guías de resolución: Basándonos en los conceptos de operaciones con matrices y matriz inversa

Ejercicio 14. Demuestre que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden n, entonces $\boldsymbol{(A + B)^2 = A^2 + 2BA + B^2 =}$ si y solo si $\boldsymbol{AB = BA}$.

Guías de resolución: Basándonos en los conceptos de operaciones con matrices y matriz inversa

Ejercicio 15. Calcule el determinante para cada matriz dada**:**

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

Basándonos en los conceptos aprendidos anteriormente, podemos resolver el ejercicio planteado. Para poder resolver el determinante de una matriz, debemos tener en cuenta los siguientes conceptos.

- Definición de determinantes y sus propiedades.}
- Método de Laplace.
- Método de Laplace simplificado.
- Regla de Sarrus
- Regla de Chio.

Dependiendo de ante que matriz nos encontramos (numero de orden) el método que aplicaremos para resolver el determinante.
Es importante destacar que para calcular el determinante de una matriz esta debe SER CUADRADA, o sea de orden n*n.
A modo de ejemplo resolveremos el ejercicio 15b:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver dicho determinante aplicaremos la regla de Sarrus:

Regla de Sarrus. Pasos

Dada una matriz A de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de A será:

Nota: Nótese que al calcular el determinante. Cambia la forma de escribir la matriz, se deja de usar corchete y se pasa a utilizar dos líneas.
Esto no es un capricho es la nomenclatura correcta

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

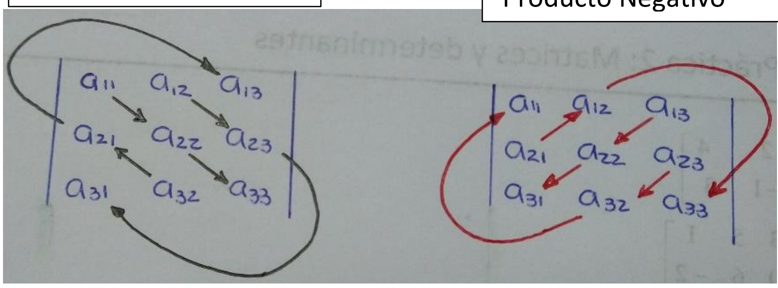
$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{32} * a_{21} * a_{13} + a_{12} * a_{23} * a_{31} - a_{13} * a_{22} * a_{31} - a_{32} * a_{23} * a_{11} - a_{12} * a_{21} * a_{33} =$$

Regla memotécnica grafica

Producto Positivo

Producto Negativo



Nota: las fechas indican los productos que se debe realizar

Producto positivo

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La zona sombreada representa los factores que interviene en el producto

$$producto\ positivo = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{32} * a_{21} * a_{13} + a_{12} * a_{23} * a_{31}$$

Producto negativo

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La zona sombreada representa los factores que interviene en el producto

$$producto\ negativo = a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{32} * a_{23} * a_{11} + a_{12} * a_{21} * a_{33} =$$

Solución

De lo antes visto procedemos a la resolución del ejercicio

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

1. Cálculo del producto positivo
$= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{32} * a_{21} * a_{13} + a_{12} * a_{23} * a_{31} =$
$3 * 6 * 1 + 5 * (-2) * 2 + 5 * 0 * 1 = 18 + (-20) + 0 = -2$

2. Cálculo del producto negativo
$= a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{32} * a_{23} * a_{11} + a_{12} * a_{21} * a_{33} =$
$= 1 * 6 * 2 + 5 * 0 * 1 + 5 * (-2) * 3 = -18$
3. Cálculo de determinante
$\det(B) = (-2) - (-18) = 16$

Ejercicio 16. Calcule el valor de x en la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Guías de resolución: nos valdremos de los conceptos aprendidos en determinantes

Ejercicio 17. Partiendo de la siguiente matriz, calcula el determinante de la matriz A por el desarrollo de Laplace:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -30 & 24 \\ 15 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Según la segunda fila.
b. Según la tercera columna

Solución

Apoyándonos en los conceptos aprendidos con anterioridad, podemos resolver el ejercicio planteado.
Para poder resolver los determinantes de una matriz, debemos tener en cuenta los siguientes conceptos.

- Definición de determinantes y sus propiedades.
- Método de Laplace.

Para resolver el método de Laplace se procede de la siguiente forma:

✓ Dada una matriz de orden n. tomamos un elemento PIVOTE y eliminando la fila y la columna a la que pertenecen realizamos el siguiente procedimiento; a modo de ejemplo utilizaremos una matriz de orden 3:

I. Elección del elemento PIVOTE.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} * a_{11} * A_{11} + (-1)^{i+j} * a_{21} * A_{21} + (-1)^{i+j} * a_{31} * A_{31}$$

Nosotros elegimos elementos PIVOTES los correspondientes a la columna C_1.

II. Cálculo de las potencias $(-1)^{i+j}$

El exponente $i + j$ del factor dependerá de la posición del elemento pivotante dentro del determinante.

$$= (-1)^{1+1} * a_{11} * A_{11} + (-1)^{2+1} * a_{21} * A_{21} + (-1)^{3+1} * a_{31} * A_{31} =$$

$$= (-1)^2 * a_{11} * A_{11} + (-1)^3 * a_{21} * A_{21} + (-1)^4 * a_{31} * A_{31} =$$
$$= 1 * a_{11} * A_{11} + (-1) * a_{21} * A_{21} + 1 * a_{31} * A_{31} =$$

III. Cálculo de los determinantes A_{ij}

$$= 1 * a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) * a_{21} * \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 1 * a_{31} * \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$Solo\ ejemplificaremos\ con\ el\ primer\ termino$

$$A_{11} = 1 * a_{11} * (a_{22} * a_{33} - a_{32} * a_{23}) =$$

1. Resolución del ejercicio.

A modo de ejemplo resolveremos el ejercicio 17a

$$Det(3A) = \begin{vmatrix} 3 & -30 & 24 \\ 15 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

I. Planteo del método

$$= (-1)^{2+1} * a_{21} * A_{21} + (-1)^{2+2} * a_{22} * A_{22} + (-1)^{2+3} * a_{23} * A_{23} =$$

$$= (-1)^{2+1} * a_{21} * \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} * a_{22} * \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} * a_{23} * \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

II. Reemplazo de los términos

$$= (-1)^{2+1} * 15 * \begin{vmatrix} -30 & 24 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} * 6 * \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} * 0 * \begin{vmatrix} 3 & -30 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

III. Calculo de las potencias

$$= (-1)^3 * 15 * \begin{vmatrix} -30 & 24 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 * 6 * \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 * 0 * \begin{vmatrix} 3 & -30 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) * 15 * \begin{vmatrix} -30 & 24 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 * 6 * \begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) * 0 * \begin{vmatrix} 3 & -30 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

IV. Cálculo de los determinantes

$$= (-1) * 15 * ((-30 * 1 - 24 * (-5)) + 1 * 6 * (3 * 1 - 2 * 24) + (-1) * 0 * (3 * (-5) - 2 * (-30)) =$$

$$= (-1) * 15 * ((-30) - (-120)) + 1 * 6 * (3 - 48) + (-1) * 0 * ((-15) - (-60)) =$$

$$= (-1) * 15 * (90) + 1 * 6 * (-45) + (-1) * 0 * (45) =$$

2. Resultado del ejercicio

$$Det(3A) == (-1) * 15 * (90) + 1 * 6 * (-45) + (-1) * 0 * (45) =$$
$$= (-1350) + (-270) + 0 = -1620$$

3. Multiplicación por un escalar

Por propiedades de los determinantes se sabe que dada una matriz A cuadrada de orden n, y un escalar k $\forall\ k \in \mathbb{R}$, se cumple que $Det(k * A) = k^n * \det(A)$. Donde n es el número de orden de la matriz A.

$$Det(3A) = 3^n * \det(A) \Rightarrow det(3A) = 3^3 * \det(A) =$$

$$3^3 * \det(A) = -1620 \Rightarrow 27 * \det(A) = -1620$$

$$\therefore \det(A) = \frac{-1620}{27} = -60$$

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes ítems halla todos los valores de k reales, tales que se cumpla det(A)=0

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$

Guías de resolución: Nos valdremos de los conceptos aprendidos en determinantes

Ejercicio 19 Sean las matrices A y B, aplicando las propiedades de los determinantes, Calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A * B)$.
b) $\det(A + B)$.
c) $\det(A^{10})$
d) $\det(A^5 * B - A^5)$

Guías de resolución: Nos valdremos de los conceptos aprendidos en determinantes y de las propiedades de los determinantes.

Ejercicio 20. Determina todos los valores de x, siendo x un numero real, para los cuales la siguiente matriz es inversible.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{bmatrix}$$

Guías de resolución: Nos valdremos de los conceptos de definición de matriz inversa.

Ejercicio 21. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Calcula el det(A) según la primera columna ¿Es posible hallar la inversa de A?
b) Halla la matriz A^{-1}, inversa de A, y calcula se determinante según la segunda fila.
c) Verifica que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Guías de resolución: Tomaremos lo aprendido en calculo del determinante de una matriz y lo aprendido en calculo de la matriz inversa

Ejercicio 22. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A,B y C por regla de Chío.
b) Encuentra la matriz de cofactores de A, B y C.
c) Determina la matriz adjunta de cada una de ellas.
d) Calcula la matriz inversa de A, B y C.

Solución

Para explicar el proceso de resolución de este ejercicio, resolveremos a modo de ejemplo la matriz B.

1. Resolución del inciso a (Calcula el determinante de A,B y C por regla de Chío)

   Partiendo de los conceptos aprendidos con anterioridad, podemos resolver el ejercicio.
   Para poder resolver los determinantes de una matriz, debemos tener en cuenta los siguientes conceptos:
   - Definición de determinante y sus propiedades.}
   - Operaciones elementales.
   - Método de Laplace.
   - Regla de Chio.

Regla de Chio

Se fundamenta en operaciones elementales de filas o columnas y un pivote que por rapidez en la operación matemática (suma, resta y multiplicación) escogemos un elemento identificado con el valor numerico uno (1); si en los elementos del determinante de la matriz no se tiene un elemento identificado con este mumero, se busaca este elemento sacando un factor común a todos los elementos de una fila o columna o se aplican operaciones elementales de filas o columnas.
El objetivo es transformar el determinante de una matriz cuadrada de orden n en una de orden n-1 y así sucesivamente hasta llegar a un determinante de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la contradiagonal (det de una matriz de orden 2)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I. Primero elegimos una fila ó columna que tenga al menos un elemento cero (0) y un uno(1). En nuestro caso C_1.
II. El resto de los elementos de C_1 deben ser convertidos en ceros a través de operaciones elementales

Operaciones realizadas.

$$F_3{}^* = F_3 - 3 * F_1$$
$$F_4{}^* = F_4 + 2 * F_1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 3 & -8 \\ 0 & 11 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

III. Aplicado estu usamos el metodo de Laplace, para calcular de determinante de b, por la C_1. Como el resto de los elementos de C_1 son ceros y $0 * k = 0$ *cuando k es cualquier elemento*; en nuestro caso. Solo debemos calcular el primer PIVOTE.

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 3 & -8 \\ 0 & 11 & -3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} * a_{11} * A_{11} = (-1)^2 * 1 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & -8 \\ 11 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & -8 \\ 11 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

IV. Repetimos los pasos I;II y III. Con lo obtenido. Ahora elegiremos la F_1, de esta matriz resultante hallando $|B^*|$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & -8 \\ 11 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

V. Aplicando la regla de Chio

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & -8 \\ 11 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Operaciones realizadas.
$C_3^* = C_3 + C_1$
$C_2^* = C_2 - 2 * C_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & -8 \\ 11 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -16 \\ 11 & -25 & 19 \end{bmatrix}$$

VI. Aplicamos Laplace

$$|B^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -16 \\ 11 & -25 & 19 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} * a_{11} * A_{11} =$$

$$= (-1)^2 * 1 * \begin{vmatrix} 19 & -16 \\ -25 & 19 \end{vmatrix} = 1 * (19 * 19 - ((-25) * (-16)) =$$
$$1 * (361 - (400)) = -39$$

2. Resolución del inciso b (Encuentra la matriz de cofactores de A, B y C)

Para poder resolver el inciso b debemos hacer un resapo, ya que utilizaremos los siguintes conocimientos:

- Definición de determinantes y sus propiedades.
- Operacimen elementales.
- Calculo de los cofactores.

El calculo de kos cofactores de una matriz se obtiene a través de la siguiente operación.

✓ Tomamos la matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

✓ Eliminamos la fila y columna a la que pertenece el cofactor a calcular y realizamos la siguiente operación:

$$B_{para\ C_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{para\ C_{21}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} * A_{ij}$$

El exponente de $(-1)^{i+j}$ depende de la posición del elemento dentro de la matriz y A_{ij} es el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna a la que pertenece dicho elemento.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 * (-17) = -17$$

$$C_{21} = (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 * (21) = -21$$

$$C_{13} = (-1)^4 * (-25) = -25 \qquad C_{12} = (-1)^3 * (-13) = 13$$
$$C_{14} = (-1)^5 * 37 = -37 \qquad C_{22} = (-1)^4 * 0 = 0$$
$$C_{23} = (-1)^5 * 24 = -24 \qquad C_{24} = (-1)^6 * (-9) = -9$$
$$C_{31} = (-1)^4 * 2 = 2 \qquad C_{32} = (-1)^5 * (19) = -19$$
$$C_{33} = (-1)^6 * 19 = 19 \qquad C_{34} = (-1)^7 * (-25) = 25$$
$$C_{41} = (-1)^5 * (-14) = 14 \qquad C_{24} = (-1)^6 * (-13) = -13$$
$$C_{43} = (-1)^7 * (-16) = 16 \qquad C_{44} = (-1)^8 * (19) = 19$$

$$Cofactores\ de\ B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}$$

$$Cofactores\ de\ B = \begin{bmatrix} -17 & 13 & -25 & -37 \\ -21 & 0 & -24 & -9 \\ 2 & -19 & 19 & 25 \\ 14 & -13 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

3. Resolución del inciso c. (Determina la matriz adjunta de cada una de ellas)

Para poder resolver el inciso c debemos hacer un repaso , ya que utilizaremos los siguientes conocimientos:

- Definición de matriz traspuesta.
- Definicio de determinate y sus propiedades.
- Operaciones elementales.
- Definición de matriz adjunta.

Matriz adjunta

Si $A = [a_{ij}]$es una matriz cuadrada y C_{ij} es el cofactor de a_{ij}, se define la matriz adjunta de A, denotada $Adj(A)$, como la matriz de cofactores traspuesta

$$Cof\ (B) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}$$

$$Adj(B) = Cof^T\ (B) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Luego la adjunta de B será

$$Adj(B) = Cof^T\ (B) = \begin{bmatrix} -17 & -21 & 2 & 14 \\ 13 & 0 & -13 & -13 \\ -25 & -24 & 19 & 16 \\ -37 & -9 & 25 & 19 \end{bmatrix} = Adj(B)$$

4. Resolución del inciso d (Calcula la matriz inversa de A, B y C.)
   Para poder resolver el inciso d debemos hacer un repaso, ya que utilizaremos los siguientes conocimientos:
   - Definición de matriz transpuesta.}
   - Definición de determinante y sus propiedades.
   - Operaciones elementales.
   - Definición de adjunta.

Matriz inversa por el método de la adjunta

En el algebra matricial, la división no esta definida. La inversión de matrices es la contraparte de la división en el algebra.
La inversa de una matriz esta definida como aquella matriz, que multiplicada por la original da por resultado la matriz identidad, se denota como A^{-1}; esto se cumple siempre y cuando $\det(A) \neq 0$.
La matriz inversa se obtiene en su forma clásica, de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-39} * \begin{bmatrix} -17 & -21 & 2 & 14 \\ 13 & 0 & -13 & -13 \\ -25 & -24 & 19 & 16 \\ -37 & -9 & 25 & 19 \end{bmatrix} =$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{39} & \frac{21}{39} & -\frac{2}{9} & -\frac{14}{39} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{25}{39} & \frac{8}{13} & -\frac{19}{39} & -\frac{16}{39} \\ \frac{37}{39} & -\frac{3}{13} & -\frac{25}{39} & -\frac{19}{39} \end{bmatrix} =$$