INGRESO 2021- FCEN
MÓDULO MATEMÁTICA

UNIDAD N°1

“Nociones de conjuntos- Conjuntos Numéricos”

El material que compone estas notas ha sido elaborado por la Prof. Estrellita Sobisch y revisado por las Profesoras Gisela Fitt, Celeste Scatragli Y Eugenia Artola.

La finalidad de este es brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, del curso de Ingreso de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, (o cualquier otro curso de Ingreso a la Universidad), la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio y que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal, la indicada al final del apunte.

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Lógica Proposicional
- Teoría de Conjuntos
- Conjuntos Numéricos, haciendo énfasis en el Conjunto de los Números Reales
- Propiedades de los Números Reales
- Operaciones en $\mathbb{R}$
- Propiedades de las Operaciones
- Notación Científica
- Una breve referencia a las operaciones con fracciones.
- Exponenciales
- Radicales

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

1874 - Georg Cantor

Georg Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, el 3 de marzo de 1845. En 1856 se trasladó con sus padres a Francfort, Alemania. Por ende, diversas patrias lo reclaman como hijo, pero Cantor se inclinó por Alemania.
En Berlín se especializó en Matemáticas, Filosofía y Fisíca.
En matemáticas sus profesores fueron: Kummer, Weierstrass y su futuro enemigo, Kronecker.
Su talento precoz por las matemáticas lo llevó en 1874 a presentar al mundo su…

TEORÍA DE CONJUNTOS

El estudio de los infinitos por parte de Cantor fue considerado la locura matemática. Creyendo que la matemática sería llevada al manicomio bajo la dirección de Cantor.
Mientras Cantor legó al desarrollo de las Matemáticas y a la Humanidad un lenguaje que nos permitió romper límites e ir más allá de lo soñado, él se condenó al infierno de la locura, siendo internado posteriormente en un manicomio.
Fue atacado vigorosamente por Kronecker con todas las armas que tuvo en su mano, con el trágico resultado de que no fue la teoría de conjuntos la que cayó en el manicomio, . . . sino el propio Cantor.
A inicios del siglo XX (1910-1913) la teoría de Cantor obtuvo el auxilio inestimable del matemático, filósofo y sociólogo inglés Beltrand Russell, que ayudó a eliminar algunas de las paradojas de la teoría de los conjuntos de Cantor.
A inicios del siglo XX (1910-1913) la teoría de Cantor obtuvo el auxilio inestimable del matemático, filósofo y sociólogo inglés Beltrand Russell, que ayudó a eliminar algunas de las paradojas de la teoría de los conjuntos de Cantor.
Cantor hizo ver que hay una jerarquía de infinitos, cada uno "mayor" que su precedente. Su teoría es una de las piedras angulares de la matemática.
Los matemáticos acostumbran a decir que

“Nadie nos sacará del paraíso creado por Cantor”

Cantor murió en Halle (ciudad del centro de Alemania), el 6 de enero de 1918, teniendo 73 años.
Ya le habían sido concedidos múltiples honores y su obra había logrado ser reconocida.

Presentamos a continuación los conceptos elementales de su Teoría:

- El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemáticas, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas.

- En su forma explícita, los principios y terminología de la Teoría de Conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el infinito.

- No puede darse una definición satisfactoria de un conjunto en términos de conceptos simples, por lo tanto, la palabra "*CONJUNTO*" debe aceptarse lógicamente como un *término no definido*.

1.1 Definiciones

- Podemos decir que un **CONJUNTO** es cualquier colección de objetos, individuos o entes.
- Todo objeto que integra un conjunto recibe el nombre de **ELEMENTO** (o Miembro) del conjunto.

¿Cómo representamos a un conjunto?

Podemos describir de manera precisa cuáles son los elementos de dicho conjunto.

→ Por extensión

→ Por comprensión

- A los conjuntos los designamos con letra mayúscula A, B, C, X, Y, ...
- A sus elementos los escribimos con letras minúsculas, números, símbolos, signos específicos, nombres, etc.
- Los elementos se encierran entre llaves y se separan por una coma.

  Por extensión Ej.: $A = \{1 , 3 , 5 , 7 , 9\}$

  Por comprensión Ej.: $A = \{x \mid x\ es\ natural\ e\ impar\ y\ x \leq 9\}$
- Si 3 es un elemento de un conjunto A escribimos $3 \in \boldsymbol{A}$
- Si 2 no es un elemento de un conjunto A escribimos $2 \notin \boldsymbol{A}$
- La representación por comprensión consta de dos partes dentro de las llaves

Este signo se lee "tal que" y separa en dos partes el contenido entre los paréntesis

$$P = \{x \ / \ \underbrace{x \text{ es número par} \wedge 0 < x < 10}\}$$

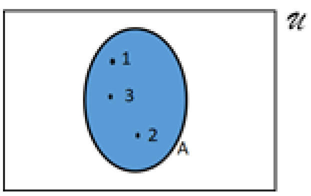
La parte de la izquierda indica la naturaleza de los elementos de P

La parte de la derecha indica la propiedad que debe tener un elemento para pertenecer a P

- $P = \{x / \ x\ es\ número\ par \wedge 0 < x < 10\}$ se lee: "P es el conjunto de todas las x tales que x es un número par y x es mayor que 0 y menor que 10"
- Definimos dos conjuntos especiales:
  - El conjunto **Vacío**, denotado con el símbolo ϕ, es el conjunto que no tiene ningún elemento. Su representación por comprensión es $\phi = \{x \mid x \neq x\}$ y por extensión es $\phi = \{\ \}$
  - El Conjunto **Universal**, denotado por la letra $\mathcal{U}$. Este conjunto tiene en él todos los elementos existentes, incluso conjuntos. Su representación por comprensión es $\mathcal{U} = \{x \mid x = x\}$

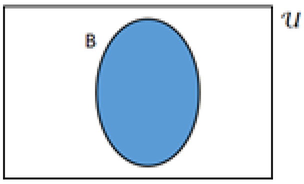
1.2. Representación gráfica

Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante un esquema conocido como Diagrama de Euler-Venn. Así, el conjunto $A = \{1, 2 , 3\}$ se puede representar:



El Diagrama de Euler-Venn tiene algunas normas que deben seguirse rigurosamente. A saber:

1. Siempre el conjunto debe enmarcarse en un recinto rectángular que representa al conjunto Universal ($\mathcal{U}$).
2. Los elementos, por convención, deben figurar indicados con un punto y junto a éste, nombrarlo.
3. El nombre del conjunto se escribe fuera de él, para que no sea confundido con un elemento.
4. Un conjunto cualquiera, B, se representa de la siguiente manera:



1.3. Subconjuntos

Consideremos los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y B = {1, 2, 3, 4, 5}.
Los elementos de A: $1, 3$ y 5, también pertenecen a B, o sea, también son elementos de B.
Decimos entonces que A es un ***subconjunto*** de B, o que A está ***incluido*** *en* B.

> Un conjunto A es n subconjunto del conjunto B si todo elemento de A pertenece a B, o sea, es también un elemento de B.
> Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está incluido en B.

$$A \subseteq B \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

El símbolo $\forall x$ se lee: “para todo x”.

∀: es el Cuantificador Universal y denota que la cantidad de elementos para los que se cumple el enunciado siguiente, en este caso una proposición, debe ser el total de los elementos del conjunto, en este caso, A.

El símbolo ⇒, se lee: “entonces”.

El enunciado $x \in A \Rightarrow x \in B$, se lee: “**Si** x pertenece a A, **entonces**, x pertenece a B” o bien “**Si** x pertenece a A, **implica** que x pertene a B” y es una proposición, desde el punto de vista de la Lógica Proposicional.

Con el término **proposición**, nos referimos a aquellos enunciados de los cuales se puede afirmar que lo enunciado es Falso o Verdadero.

$A \subseteq B$ es una proposición y se lee: "A está incluido en B" o "A es un subconjunto de B"

El símbolo $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ se lee: "si y sólo sí, por definición". Cuando aparece solamente la doble flecha ($\Leftrightarrow$) se lee "si y sólo sí".

La frase "si y sólo si" implica dos proposiciones. Una proposición es: $A \subseteq B \Rightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$, que puede leerse: "Si A está incluido en B, entonces, todo x que pertenece a A, implica que x también pertenece a B". La otra proposición es: $\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subseteq B$, que puede leerse: "Si para todo x que pertenece a A, x también pertenece a B, entonces, A está incluido en B".

1.4. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
El orden de los elementos o la repetición de uno o más de ellos no influye.

$$A = B \underset{def}{\Longleftrightarrow} (A \subset B \ \wedge \ B \subset A)$$

Por todo lo expuesto en la sección anterior, esta proposición puede leerse: "A es igual a B, sí y sólo sí, A está incluido en B y B está incluido en A"
El símbolo $\subset$ se lee también como: "incluido", es semejante al símbolo "$\subseteq$", sólo que en este caso se admite, de base, la posibilidad de la igualdad entre ambos conjuntos.

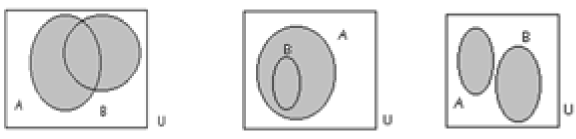
1.5. Operaciones entre conjuntos

1.5.1. Unión

Sean A y B dos conjuntos

La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



$A \cup B$ $\quad$ $A \cup B = A$ $\quad$ $A \cup B$

Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la unión de dos o más conjuntos, basta que pertenezca a uno de los conjuntos en cuestión.

Ejemplo: Efectuar operaciones con conjuntos

Si $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,5\}$, entonces $\quad A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

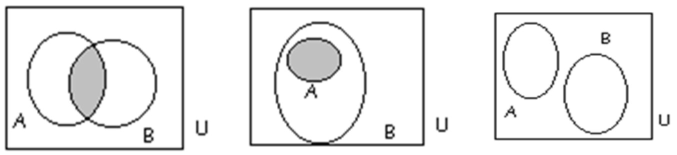
PROPIEDADES DE LA UNIÓN

1. $A \cup \phi = A$
2. $A \cup A = A$
3. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

1.5.2. Intersección

Sean A y B dos conjuntos. La intersección $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y pertenecen a B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$



$A \cap B$ $\quad$ $A \cap B = A$ $\quad$ $A \cap B = \varnothing$

Conjuntos disjuntos o mutuamente excluyentes: son aquellos que no tienen elementos comunes

Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la intersección de dos o más conjuntos, debe pertenecer a **todos** de los conjuntos en cuestión.

Ejemplo: Efectuar operaciones con conjuntos

Sean $U = \mathbb{N}$, $A = \{n | n \leq 11\}$, $P = \{n | n\ es\ primo\}$ entonces:

$$A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = A$
3. Si A es un subconjunto de B, esto es $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$

Ejemplo: Efectuar operaciones con conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

Solución

$S \cup T = \{1, 2, 3,, 4, 5, 6, 7\}$	Todos los elementos en S o en T
$S \cap T = \{4, 5\}$	Elementos comines a S y T
$S \cap V = \{\ \ \} = \emptyset$	S y V no tienen elementos en común

Trabajo Práctico

Ejercicio 1: Operaciones con conjuntos

Encuentre el conjunto indicado si:

$A = \{x \in R / x \geq -2\}$; $B = \{x \in R / x < 4\}$; $C = \{x \in R / -1 < x \leq 5\}$

a. $B \cup C$
b. $B \cap C$
c. $A \cap C$
d. $A \cup B$

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos se van ampliando a medida que se necesitan resolver ciertas problemáticas de la vida diaria.
El conjunto de los **NÚMEROS NATURALES** ($\mathbb{N}$) está constituido por los números 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$$

Los **NÚMEROS ENTEROS** ($\mathbb{Z}$)son los números naturales, junto con los negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots..\}$$

El cociente entre dos números enteros no siempre es otro número entero
El cociente de dos números enteros *a* y *b*, (con $b \neq 0$)solamente será un entero cuando *b* sea divisor de *a*

Pero si no es así será un **número fraccionario**

El conjunto de los números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los **NÚMEROS RACIONALES**, al que denotamos por $\mathbb{Q}$.

> Un número *racional* $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, con *b* ≠ 0, siendo *a* el numerador y *b* el denominador.

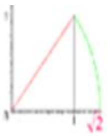
- Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{0}{0}$ y $\frac{3}{0}$ no están definidas.

Todo número racional tiene una representación decimal y su correspondiente representación decimal es periódica.

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000 \ldots = 0{,}5\overline{0} \quad ; \quad \frac{2}{3} = 0{,}66666 \ldots = 0,\overline{6} \quad ;$$

$$\frac{157}{495} = 0{,}317171717 \ldots = 0{,}3\overline{17} \quad ; \quad \frac{9}{7} = 1{,}28574285714\ldots = 1,\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite infinitamente. La parte que se repite se llama *periodo*).
Aquellos racionales cuya expresión decimal periódica tienen periodo $\overline{0}$, como en el caso de $\frac{1}{2}$, se caracterizan porque el resto de la división entre numerador y denominador se hace cero en algún momento.
Existen números que no pueden ser escritos como cociente de dos números enteros, por ejemplo:

$\sqrt{2}$;  ; $\sqrt{5}$  ; $\sqrt[3]{5}$; e ; π ; Φ

A estos números, se los llama Números Irracionales y al conjunto se lo denota con la letra $\mathbb{I}$.
Si el número es *irracional*, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número irracional en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee “es aproximadamente igual a”. Cuantos más lugares decimales escribamos, mejor es nuestra aproximación.

En esta unidad del curso **NO** se permite el uso de la expresión decimal de números irracionales, salvo indicación expresa. Debemos acostumbrarnos a trabajar con los números irracionales con su *expresión exacta.*

3. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números **RACIONALES** UNIÓN el conjunto de los números **IRRACIONALES** forman el conjunto de los números **REALES**

⬇

ESTE CONJUNTO ES DENOTADO CON LA LETRA $\mathbb{R}$

O sea que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

Trabajo Práctico

Ejercicio 2: Reconocimiento de conjuntos numéricos

En los Conjuntos siguientes determine cuáles números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.

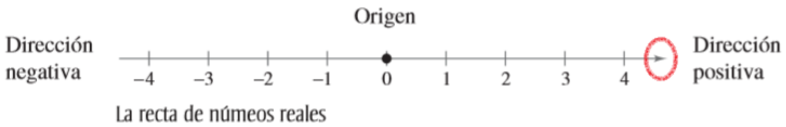
1. $\left\{-9\,, -\frac{7}{2}, 5\,, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 1\,, -4\,, 2, -11\right\}$
2. $\left\{25\,;\ -17\,;\ -\frac{12}{5}\ ;\ \sqrt{-9}\,;\ 3{,}12\,; \frac{\pi}{2};\ 7\,; -11{,}1; 13\right\}$
3. $\left\{\sqrt{5}\,, -7\,, -\ \frac{7}{3}\,, 0\,, 3\,, 12\,, \frac{5}{4}\ \ , -3\ \ , 12\,, 5\ \right\}$
4. $\{2{,}01\,; 0{,}666\ldots;\ -13\,; 0{,}010110111\ldots\ldots;\ \ 1\,;\ -6\}$
5. $\left\{-\pi\,, -\frac{1}{3}, \frac{6}{3}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -7.5\,, -1{,}8\,, -22\right\}$
6. $\{2.3030030003\ldots\,,\ 0.7575\,. -4.63\,, \sqrt{10}, -75\,, 4\}$

Ejercicio 3: Reconocimiento de conjuntos numéricos

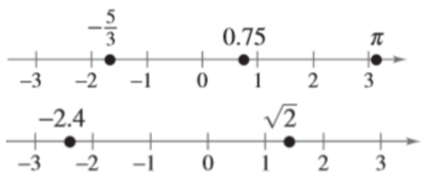
Complete las siguientes proposiciones con $\in o \notin$ para que resulten verdaderas.

a.	-4 $\ldots\ldots Z$	b.	$-4 \ldots . Q$	c.	$1{,}5 \ldots . Q$
d.	$0 \ldots . Q$	e.	$\sqrt{9} \ldots . Z$	f.	$\sqrt{-16} \ldots . I$
g.	$\sqrt{-16} \ldots . R$	h.	$\sqrt{5} \ \ldots . I$	i.	$\frac{1}{4} \ldots . R$

Los números reales se representan gráficamente sobre la **recta de números reales**.
Al trazar un punto sobre la recta de números reales, estamos **graficando** el número real. El punto 0 sobre la recta de números reales es el origen. Los números a la derecha del 0 son positivos y a la izquierda son negativos, como se ve en la siguiente figura.
El término **no negativo** describe un número que es <u>positivo o cero</u>.



Hay una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos sobre la recta de números reales



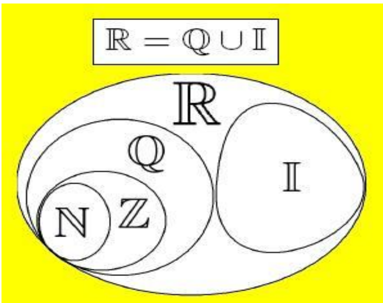
- Todo número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta de números reales.
- Todo punto sobre la recta de números reales corresponde exactamente a un número real.

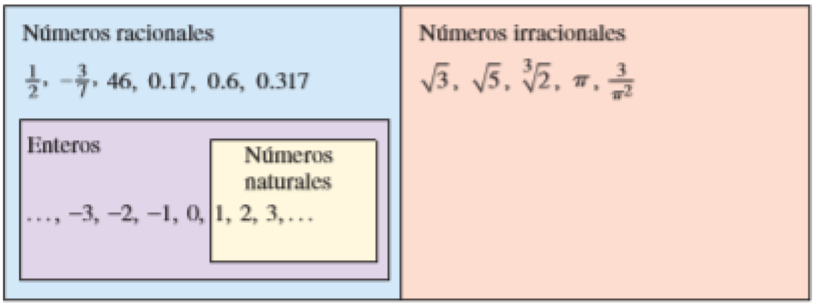
Ejercicio 4: Representación Gráfica de puntos sobre la recta de números reales

Grafique los números reales sobre la recta de números reales.

$a) -\frac{7}{4}$ $\qquad b)\ 2{,}3$ $\qquad c)\ \frac{2}{3}$ $\qquad d) -1{,}8$

Esquemáticamente, mediante Diagrama de Euler-Venn, podemos representar a $\mathbb{R}$ así:





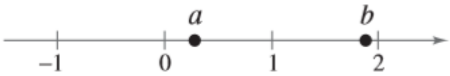
El conjunto de los Números Reales **se caracteriza** por las siguientes propiedades:

- Infinito
- Ordenado
- No tiene primer elemento
- No tiene último elemento

- Entre dos números reales existen infinitos números reales, por eso se dice que el conjunto de los reales es DENSO

4.1 Orden de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que tienen un orden.
Por ser un conjunto **Ordenado** decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo
Geométricamente a se encuentra a la izquierda de b en la recta real



Es equivalente $a < b$ a $b > a$ y se lee “b menor que a”
El símbolo $a \leq b$ se lee: “a es menor o igual que b “y significa que $a < b$ o $a = b$

Trabajo Práctico

Ejercicio 5: Comparación de números reales

Compare los siguientes números reales.

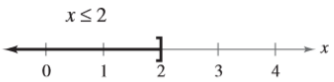
a. $3 \ldots \frac{7}{2}$	b. $-3 \;\ldots\; -\frac{7}{2}$	c. $3{,}5 \ldots \frac{7}{2}$
d. $0.67 \ldots 0.677$	e. $\frac{2}{3} \ldots . 0.67$	f. $-1 \ldots 0$

Ejercicio 6: Interpretación de desigualdades (Ejemplo)

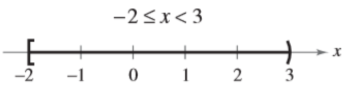
Describa el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad.
$(a) x \leq 2$ $\quad (b) -2 < x \leq 3$

Solución

a. La desigualdad $x \leq 2$ denota todos los números reales menores o iguales a 2, como se ve



b. La desigualdad $-2 < x \leq 3$ significa que $x \geq -2$ y $x < 3$. Esta “doble desigualdad” denota todos los números reales entre -2 y 3, incluidos -2 pero no 3, como se muestra



Ejercicio 7: Interpretación de desigualdades

Describa el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad y haga su representación gráfica, como en el ejemplo anterior

$a)\ x \leq 5$ $\quad b)\ x \geq -2$ $\quad c) -2 < x < 2$ $\quad d)\ 0 \leq x \leq 5$
$e) -1 \leq x < 0$ $\quad f)\ 0 < x \leq 6$

Ejercicio 8: Interpretación de desigualdades

Escriba cada enunciado en término de desigualdades.

a. x es positiva ______________________________

b. t es menor que 4 ______________________________

c. a es mayor o igual que π ______________________________

d. La distancia de p a 3 es como mucho 5. ______________________________

e. x es menor que $\frac{1}{3}$ y mayor que -5. ______________________________

4.2 Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales, llamados intervalos, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta.
Si $a < x < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con $(a\,,b)$. El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a\,,b]$.
Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir
$(a\,,b) = \{x \mid a < x < b\}$; $[a\,,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
Gráficamente:

El intervalo abierto (a, b) ;

El intervalo cerrado $[a, b]$

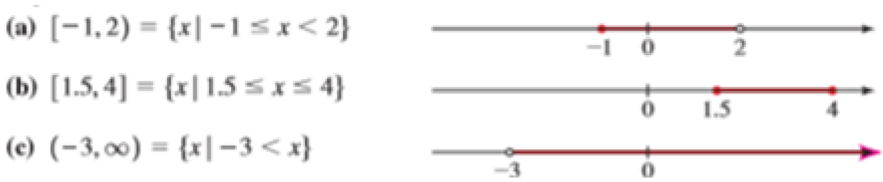
Los intervalos también pueden incluir un punto extremo, pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección, o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo ∞(infinito) **no** representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

Ejemplo: Grafica de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.



Ejemplo: Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

$(a)(1\,,3) \cap [2\,,7]$ $\qquad$ $(b)(1\,,3) \cup [2\,,7]$

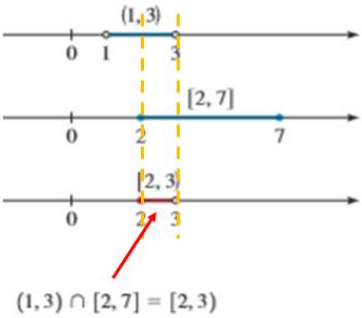
Solución

(a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$(1,3) \cap [2,7] = \{x \mid 1 < x < 3 \; y \; 2 \leq x \leq 7\}$

$(1,3) \cap [2,7] = \{x | 2 \leq x < 3\} = [2,3)$

Gráficamente:

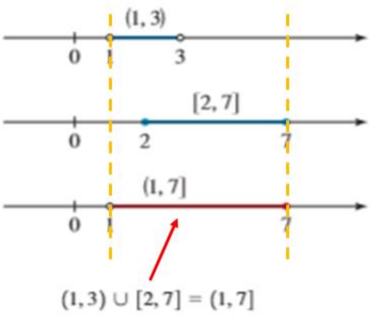


(b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$(1,3) \cup [2,7] = \{x \mid 1 < x < 3 \; o \; 2 \leq x \leq 7\}$$

$$(1,3) \cup [2,7] = \{x | 1 < x \leq 7\} = (1,7]$$

Gráficamente:



Trabajo Práctico

Ejercicio 9: Asociación de desigualdades con intervalos

Exprese la desigualdad con notación de intervalos, y después grafique el intervalo.

a. $x \leq -1$ $\qquad$ b. $-2 < x \leq 1$

c. $x > -5$ $\qquad$ d. $-5 < x < 2$

Ejercicio 10: Operaciones con Intervalos

Grafique los siguientes conjuntos.

a. $(-2,0] \cup (-1,1)$

b. $[-4,6] \cup [0,8)$

c. $(-\infty, 6\,] \cap (2,10)$

d. $[-4,6] \cap [0,8)$

4. MÓDULO O VALOR ABSOLUTO

Se llama **módulo** o **valor absoluto** de un número real $\boldsymbol{a}$ a la distancia que existe entre dicho número y el cero.

Se simboliza $|\boldsymbol{a}|$

Por el hecho de ser una distancia, el módulo nunca toma valores negativos.

Definición de Valor Absoluto de un Número

Si $\boldsymbol{a}$ es un número real

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & si \quad a \geq 0 \\ -\boldsymbol{a} & si \quad a < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedades	Ejemplos	Descripción
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -2\rvert = 2 \geq 0$	• El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 4\rvert = \lvert -4\rvert = 4$	• Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\lvert -2 \cdot 7\rvert = \lvert -2\rvert \cdot \lvert 7\rvert = 2 \cdot 7$	• El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{8}{-5} \right\rvert = \frac{\lvert 8\rvert}{\lvert -5\rvert} = \frac{8}{5}$	• El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

- Recuerde SIEMPRE que $\sqrt{x^2} = |x|$

Ejemplo: Evaluaciones de Valores Absolutos en números y operaciones aritméticas

$(a)\ |3| = 3$

$(b)\ |-3| = 3$

$(c)\ |0| = 0$

$(d)\ |3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ porque: $(3 < \pi) \Rightarrow (3 - \pi < 0)$

Ejercicio 11: Evaluación de Valores Absolutos en números y operaciones aritméticas

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

a) $|25| =$ b) $\left|-\frac{1}{2}\right| =$ c) $\big||-6|-|-3|\big| =$

d) $\big|3-|-5|\big| =$ e) $|15.(-3)| =$ f) $\frac{|-1|}{-1} =$

g) $\left|\frac{16-5}{5-16}\right| =$ h) $\left|\frac{1}{3}.(-7)\right| =$ i) $-3-\big|3-|-3|\big| =$

Ejercicio 12: Reconocer errores en el razonamiento

Indique las propiedades y las operaciones que se han realizado en cada línea del ejercicio, identifique el error en el razonamiento y justifique.

$$2+2=4$$
$$2+2=4-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{16-2.4.\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{16-36+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{-20+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{25-45+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{5^2-2.5.\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}$$
$$2+2=5-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}$$
$$4=5$$

5. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

En el Conjunto de los Números Reales hay dos **operaciones** definidas desde el Álgebra. Que son:

SUMA: "A cada par a y b de números reales, le asigna otro número real c, llamado *suma* y que se expresa:

$c = a + b$"

Entendemos por el signo "+", la suma ordinaria aprendida en la escolarización primaria. (Existen otras *sumas*, que no vemos en este curso)

PRODUCTO: "A cada par a y b de números reales, le asigna otro número real c, llamado *producto* y que se expresa $c = a \cdot b$"

Entendemos por el signo "·", el producto, o multiplicación ordinaria aprendida en la escolarización primaria. (Existen otros *productos*, que tampoco vemos en este curso)

Ustedes se deben preguntar por la resta (o Diferencia), por el cociente o la división, la potenciación y la radicación.

La RESTA es la *SUMA* del opuesto, o sea:

$$a - b = a + (-b)$$

El símbolo usado para la DIVISIÓN es el **óbelo** (÷) o los dos puntos (**:**)

Si a es un número real, distinto de 0, existe $\frac{1}{a}$ que también pertenece a $\mathbb{R}$ y se lo llama inverso multiplicativo de a.

Vamos a considerar que $a \div b$ es la multiplicación por el inverso multiplicativo de b. O sea:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Si efectuamos la división, como aprendimos en la escolarización primaria, tenemos el siguiente esquema:

Dividendo	divisor
Resto	Cociente

Este esquema responde al Algoritmo de Euclides, esto es: $\mathbf{D = dC + R}$. El resto debe ser siempre menor que el divisor.

Sin embargo, existen varios tipos de división, según sea el cociente y el resto.

DIVISIÓN ENTERA: en este tipo de división, el cociente es un número entero y el resto puede o no ser cero.

Tenemos aquí la:

DIVISIÓN EXACTA: Una división entera lleva este nombre cuando al resolver la división, el resultado del resto es igual a cero.

Ejemplo: $a)\ 8 \div 4 = 2\ y\ r = 0$

DIVISIÓN INEXACTA: En las divisiones inexactas la cifra del resto cuenta con un valor diferente a cero, es importante destacar que el resto debe ser menor que el divisor, por lo tanto, es imposible poder seguir realizando la división.
Ejemplo: $b)\ 5 \div 2 = 2\ \ y\ \ r = 1 \neq 0$

DIVISIÓN NO ENTERA: En este tipo de división, el cociente es un número decimal y el resto puede o no ser cero, dependiendo del cociente ser un número racional periódico con periodo 0 o distinto de 0.

Es usual ver en los libros la expresión "Propiedades de los números reales". Esta expresión es incorrecta, ya que las Propiedades son de las operaciones y no de los números. Las propiedades de los números son: ser infinitos, ordenados, etc., (ya enunciadas algunas de ellas).

Resumiendo:

DEFINICIONES DE SUSTRACCIÓN Y DIVISIÓN

Sustracción: Sume el opuesto

$$a - b = a + (-b)$$

División: Multiplique por el recíproco

Si $b \neq 0$, entonces $a/b = a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$

En estas definiciones, $-b$ es el **inverso aditivo** (u opuesto) de b, y $1/b$ es el **inverso multiplicativo** (o recíproco) de b. En la forma fraccionaria a/b , a es el **numerador** de la fracción y b es el **denominador**.

Dados a, b y c números reales, analizaremos las PROPIEDADES de la SUMA y la MULTIPLICACIÓN

PROPIEDADES DE LA SUMA Y LA MULTIPLICACIÓN

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$5 + 8 = 8 + 5$	• Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$a \cdot b = b \cdot a$	$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$	• Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(5 + 7) + 2 = 5 + (7 + 2)$	• Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(5 \cdot 7) \cdot 2 = 5 \cdot (7 \cdot 2)$	• Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$9 \cdot (4 + 2) = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2$	• Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.
$(b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$	$(4 + 2) \cdot 9 = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2$	

Ejemplo: Uso de la propiedad distributiva

(a) $2(x+3) = 2\cdot x + 2\cdot 3$ — Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

(b) $(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$ — Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

Trabajo Práctico

Ejercicio 13: Aplicación de las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$

Aplique propiedades de las operaciones entre números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.

a. $(a-b)8$

b. $4(2m)$

c. $-\frac{5}{2}(2x-4y)$

d. $3a(b+c-\frac{1}{3}d)$

e. $\frac{4}{3}(-6y)$

f. $(15x-6):(-3)$

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de identidad aditiva (o neutro) porque $a+0=a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un negativo, $-a$, que satisface $a+(-a)=0$.

PROPIEDADES DEL CERO

Sean a y b números reales,

1. $a+0=a$ y $a-0=a$
2. $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$
3. $\frac{0}{a}=0$, $a\neq 0$
4. $\frac{a}{0}$ no está definida.
5. Propiedad del factor cero: si $a\cdot b=0$,entonces $a=0$ o $b=0$

La "o" en la propiedad del factor cero incluye la posibilidad de que cualquiera de los dos factores, o ambos, sean cero. Esto es una "o" inclusiva, y es la forma en que la conjunción "o" se usa por lo general en matemática. En lugar de la "o", solemos usar el símbolo " ∨ ", que es una letra ve imprenta minúscula. De esta manera, la propiedad 5 queda:

$$a.b=0 \Rightarrow (a=0 \ \vee \ b=0)$$

usando los símbolos ya explicados y se lee: "si $a.b=0$, entonces, $a=0$ o $b=0$"

8. REPASO DE LOS CÁLCULOS CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

SUMA

- La **suma** de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Ejemplo: $$\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{4+7}{3}=\frac{11}{3}$$

- Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{b.d}$$

Ejemplo: $$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$$

12 es el Mínimo Común Denominador

O el menor de los múltiplos comunes (MCM)

MULTIPLICACIÓN

- El **producto** de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo $$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$$

DIVISIÓN

- La división entre dos fracciones es otra fracción que surge al multiplicar la primer fracción por la inversa de la segunda fracción.

Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inverso multiplicativo $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ y su inverso es $\frac{b}{a}$

Luego $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo $$\frac{4}{3}:\frac{1}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{20}{3}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 14: Cálculos con Números fraccionarios

Efectúe las siguientes operaciones, sin usar la calculadora.

a. $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right)$

c. $\left(3+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)$

f. $\frac{2}{\frac{2}{3}}-\frac{2/3}{2}$

g. $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}$

h. $\frac{2-\frac{3}{4}}{0{,}5-\frac{1}{3}}$

d. $5.(-1-\frac{1}{4})$

i. $\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{15}}$

e. $1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$

9. EXPONENTES ENTEROS (POSITIVOS Y NEGATIVOS)

9.1. Notación exponencial

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial.
Por ejemplo: $4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4$ se escribe 4^5
Podemos definir

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n-ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n-veces}$$

El número a se denomina base, y n se denomina exponente

9.2. Leyes de los Exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^n\cdot a^n = a^{n+m}$	$2^5\cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$(2^5)^2 = 2^{5\cdot 2} = 2^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(2\cdot 3)^4 = 2^4 3^4$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

Es importante reconocer la diferencia entre expresiones como $(-2)^4$y -2^4. En $(-2)^4$, el paréntesis indica que el exponente se aplica al signo negativo al igual que al 2, pero en -2^4, el exponente se aplica sólo al 2. Por tanto $(-2)^4 = 16$, y $-2^4 = -16$

Ejemplo: Evaluar expresiones exponenciales

$(a)(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ **El signo negativo es parte de la base**

$(b) - 5^2 = -(5)(5) = -25$ **El signo negativo *no* es parte de la base**

$(c)\ 2\cdot 2^4 = 2^{1+4} = 2^5 = 32$ **Propiedad (1)**

$(d)\ \frac{4^4}{4^6} = 4^{4-6} = (4)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ **Propiedad (2)**

Exponentes Cero y Negativos

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo: Evaluar expresiones exponenciales

Evalúe cada una de las expresiones algebraicas cuando $x = 3$

$a)\ \ 5x^{-2}\quad ;\ b)\ \ \frac{1}{3}(-x)^3$

Solución

a) Cuando $x = 3$, la expresión $5x^{-2}$ tiene un valor de

$$5x^{-2} = 5(3)^{-2} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$$

b) Cuando $x = 3$, la expresión $\frac{1}{3}(-x)^3$ tiene un valor de

$$\frac{1}{3}(-x)^3 = \frac{1}{3}(-3)^3 = \frac{1}{3}(-27) = -9$$

Ejemplo: Usar propiedades de exponentes

Use las propiedades de los exponentes para simplificar cada expresión.

$a)\ (-3ab^4)(4ab^{-3})\quad ;\quad b)\ (2xy^2)^3\quad ;\quad c)\ 3a(-4a^2)^0\quad ;\quad d)\ \left(\frac{5x^3}{y}\right)^2$

Solución

$$(a)\ (-3ab^4)(4ab^{-3}) = (-3)(4)(a)(a)(b^4)(b^{-3}) = -12a^2b$$

$$(b)\ (2xy^2)^3 = 2^3(x)^3(y^2)^3 = 8x^3y^6$$

$$(c)\ 3a(-4a^2)^0 = 3a(1) = 3a\,,\quad a \neq 0$$

$$(d)\left(\frac{5x^3}{y}\right)^2 = \frac{5^2(x^3)^2}{y^2} = \frac{25x^6}{y^2}$$

Ejemplo: Reescribir con exponentes positivos

Reescribir cada una de las expresiones con exponentes positivos.

$a)\ x^{-1}\quad ;\quad b)\ \frac{1}{3x^{-2}}\quad ;\quad c)\ \frac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b}\quad ;\quad d)\left(\frac{3x^2}{y}\right)^{-2}$

Solución

$$(a) x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(b)\frac{1}{3x^{-2}} = \frac{1(x^2)}{3} = \frac{x^2}{3}$$

$$(c)\frac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b} = \frac{12a^3\cdot a^2}{4b\cdot b^4} = \frac{3a^5}{b^5}$$

$$(d)\left(\frac{3x^2}{y}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}(x^2)^{-2}}{y^{-2}} = \frac{3^{-2}x^{-4}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{3^2x^4} = \frac{y^2}{9x^4}$$

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntete libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a tu propio método. A continuación, damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

Leyes de Exponentes

	Ley	Ejemplo	Descripción
6.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3}$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7.	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{4^{-2}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{4^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

Demostración de la Ley 7

Usando la definición de exponente negativo y luego haciendo la división entre las fracciones tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 15: Simplificar expresiones con exponentes

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

$(a)\ \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ $\qquad (b)\ \left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

Ejercicio 16: Simplificar expresiones con exponentes

Simplifique cada expresión y elimine todos los exponentes negativos. (Suponga que las letras representan números positivos)

$(a)\ 3y^2(4y^5)$ $\qquad (b)\ a^9a^{-6}$ $\qquad (c)\ \frac{x^{-3}y^4}{x^{-5}y^5}$

$(d)\ (ab)^3(2c)^{-2}(4a)^4$ $\qquad (e)\ \frac{(6y^3)^4}{2y^5}$ $\qquad (f)\ \left(\frac{a^{-1}bc^{-2}}{a^{-5}bc^{-8}}\right)^{-1}$

$(g)\ \frac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$

Ejercicio 17: Transformar exponentes negativos en positivos

$(a)\ \left(\frac{x}{10}\right)^{-1}$ $\qquad (b)\ (2x^2)^{-2}$ $\qquad (c)\ (-2x^2)^3(4x^3)^{-1}$

$(d)\ 3^n.3^{2n}$ $\qquad (e)\ \left(\frac{a^{-3}}{b^{-3}}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^3$

10. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los exponentes son una eficiente forma de escribir y calcular números muy grandes (o muy pequeños). Por ejemplo, hay unos 359 trillones de galones de agua en la Tierra, es decir, 359 seguido de 18 ceros.

359 000 000 000 000 000 000.

Es práctico escribir esos números en notación científica. Esta notación tiene la forma $\pm c \times 10^n$, donde $1 \leq c < 10$ y n es un entero. Por tanto, el número de galones de agua en la Tierra se puede escribir en notación científica como

$$3{,}59 \text{ x } 100\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 3{,}59 \text{ x } 10^{20}$$

El exponente positivo 20 indica que el número es grande (10 o más) y que el punto decimal se ha movido 20 lugares. Un exponente negativo indica que el número es pequeño (menor a 1). Por ejemplo, la masa (en gramos) de un electrón es aproximadamente

$$9{,}0 \text{ x}10^{-28} = 0,\underbrace{0000000000000000000000000009}_{28\ lugares\ decimales}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Próxima Centauri es $4\text{x}10^{13}$ km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la derecha:

$$4 \text{ x}10^{13} = 4\ \underbrace{0.000.000.000.000}_{13\ lugares\ a\ la\ derecha}$$

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es $1.66\text{x}10^{-24}$ g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la izquierda:

$$1{,}66\text{x}10^{-24} = 0,\underbrace{0000000000000001}_{24\ lugares\ a\ la\ izquierda}\ 66$$

Ejemplo: Notación Científica

Escriba cada número en notación científica.

(a) 0,0000782 $\qquad$ (b) 836.100.000

Solución

(a) $0{,}0000782 = 7{,}82\ x\ 10^{-5}$

(b) $836.100.000 = 8{,}361\text{x}10^8$

Ejemplo: Notación decimal

Escriba cada número en notación decimal.

(a) $9{,}36x10^{-6}$ $\qquad$ (b) $1{,}345x10^2$

Solución

(a) $9{,}36x10^{-6} = -0{,}00000936$

(b) $1{,}345x10^2 = 134{,}5$

Ejemplo: Usar notación científica

Evalúe el siguiente cálculo:

$$\frac{(2\ 400\ 000\ 000)(0{,}0000045)}{(0{,}00003)(1500)}$$

Solución

Empiece por reescribir cada número en notación científica y simplifique:

$$\frac{(2\,400\,000\,000)(0{,}0000045)}{(0{,}00003)(1500)} = \frac{(2{,}4\text{x}10^{9})(4{,}5\text{x}10^{-6})}{(3{,}0\text{x}10^{-5})(1{,}5\text{x}10^{3})}$$
$$= \frac{(2{,}4)(4{,}5)(10^{3})}{(4{,}5)(10^{-2})} = (2{,}4)(10^{5}) = 240\,000$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 18: Notación Científica y Notación decimal

Escriba cada una de las expresiones decimales como notación científica y cada expresión en notación científica como expresión decimal.

Notación Decimal	Notación Científica
0.00002835	
	$9.99\ x\ 10^{-9}$
	$7.1\ x10^{5}$
7 200 000 000 000	
	6.257 $\text{x}10^{-6}$

Ejercicio 19: Aplicaciones de la Notación Científica

Escriba en notación científica la cantidad indicada en cada inciso.

a. El diámetro de un electrón es de 0.0000000000004 cm aproximadamente.
b. La masa de una de una molécula de oxígeno es de casi 0.000000000000000000000053g
c. La masa de la Tierra es de 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Ejercicio 20: Usar notación científica

Utilice la notación científica, las leyes de los exponentes y la calculadora para ejecutar las siguientes operaciones.

a. $(7.2\ x\ 10^{-9})(1.8\ x10^{-12})$

b. $\dfrac{1.2956\ x\ 10^{9}}{(3.6\ x\ 10^{-17})(2.511\ x\ \ 10^{6})}$

c. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594\ 621\ 000)(0.0058)}$

d. $\dfrac{(3.542x10^{-6})^{9}}{(5.05x\ 10^{4})^{12}}$

Ejercicio 21: Aplicaciones de la Notación Científica

1. En noviembre del 2004, la población de Estados Unidos era $2.949x\ 10^{8}$, y la deuda nacional era de $7.529x10^{12}$ dólares. ¿Cuánto debía pagar cada persona?

2. Un cuarto aislado de un hospital mide 5m de ancho, 10m de largo y 3m de alto; se llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 litros y 22.4 litros de cualquier gas contiene 6.02x10^{23} moléculas (número de Avogadro).

¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

11. RADICALES

La raíz cuadrada de un número es uno de sus dos factores iguales. Por ejemplo, 5 es la raíz cuadrada de 25, ya que 25 puede ser escrito

$$25 = 5^2 = (5) \cdot (5)$$

En forma semejante, una raíz cúbica de un número es uno de sus tres factores iguales, como en

$$125 = 5^3 = (5) \cdot (5) \cdot (5)$$

la raíz cúbica de 125 es 5.

Definición de raíz n-ésima de un número

Sean a y b números reales y sea $n \geq 2$ un entero positivo. Si

$$a = b^n$$

Entonces b es una raíz $\boldsymbol{n-ésima}$ de a. Si $n = 2$, la raíz es una **raíz cuadrada**. Si $n = 3$, la raíz es una **raíz cúbica**.

Algunos números tienen más de una raíz n-ésima. Por ejemplo, tanto 5 como (-5) son raíces cuadradas de 25. La **raíz cuadrada principal** de 25, escrita como $\sqrt{25}$, es la raíz positiva, 5. La n-ésima raíz principal de un número se define como sigue.

n-ésima raiz principal de um número

Sea a un número real que tiene al menos una raíz n-ésima. La raíz **n-ésima principal de $\boldsymbol{a}$** es la que tiene el mismo signo que a. Se denota con el **símbolo radical**

$\sqrt[n]{a}$ n-ésima raiz principal

El entero positivo n es el **índice** del radical, y el número a es el **radicando**. Si n=2, omita el índice y escriba $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$.

Un error común es que el signo de raíz cuadrada implica raíces tanto negativas como positivas. Esto no es correcto. El signo de raíz cuadrada implica sólo una raíz positiva. Cuando se hace necesaria una raíz negativa, se debe usar el signo negativo con el signo de raíz cuadrada.

Incorrecto: $\sqrt{4} = \pm 4$ **Correcto**: $-\sqrt{4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$

Ejemplo: Evaluar expresiones con radicales

$(a)\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$

$(b) - \sqrt{36} = -6$ porque $-\left(\sqrt{36}\right) = -\sqrt{6^2} = -(6) = -6$

$(c)\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4}$ porque $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$

$(d)\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

$(e)\sqrt[4]{-81}$ no es un número real porque no hay número real que pueda elevarse a la cuarta potencia para producir (-81)

Los enteros como 1, 4, 9, 16, 25 y 36 se denominan cuadrados perfectos porque tienen raíces cuadradas enteras.
O sea: $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{36} = 6$

Del mismo modo, enteros como 1 , 8 , 27 , 64 y 125 se llaman cubos perfectos porque tienen raíces cúbicas enteras.

Propiedades de los Radicales

Sean a y b números reales, variables o expresiones algebraicas tales que las raíces indicadas son números reales, y sean m y n enteros positivos.

Propiedades	Ejemplos
1. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{\dfrac{27}{9}}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^4 = 6$
6. $Para\ n\ par, \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{(-21)^2} = \lvert -21 \rvert = 21$
$Para\ n\ impar, \sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$

Ejemplo: Usar propiedades de los radicales

Use las propiedades de los radicales para simplificar cada expresión.

$(a)\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ $\qquad (b)\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ $\qquad (c)\sqrt[3]{x^3}$ $\qquad (d)\sqrt[6]{y^6}$

Solución

$(a)\ \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

$(b)\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

$(c)\sqrt[3]{x^3} = x$

$(d)\sqrt[6]{y^6} = \lvert y \rvert$

Trabajo Práctico

Ejercicio 22: Evaluar sin calculadora

Evaluar cada expresión

1. $(a)\sqrt{16}$ $\qquad (b)\sqrt[4]{16}$ $\qquad (c)\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
2. $(a)\sqrt{64}$ $\qquad (b)\sqrt[3]{-64}$ $\qquad (c)\sqrt[5]{-32}$
3. $(a)\sqrt{7}\sqrt{28}$ $\qquad (b)\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ $\qquad (c)\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

Evite el siguiente error

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos a=9 y b=16, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$$

$$5 \stackrel{?}{=} 3+4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7$$ **¡¡¡Error!!!**

11.1. Simplificación de radicales

Una expresión que contenga radicales está en su forma más simple cuando se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Todos los factores posibles han sido eliminados del radical.
2. Todas las fracciones tienen denominadores sin radicales (lo que se logra mediante un proceso llamado racionalización del denominador)
3. El índice del radical está reducido.

Para simplificar un radical, factorice el radicando en factores cuyos exponentes sean múltiplos del índice. Las raíces de estos factores se escriben fuera del radical y los factores "sobrantes" forman el nuevo radicando.

Ejemplo: Simplificar raíces pares

$$(a)\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{\underbrace{16}_{\text{Raíz 4ta. perfecta}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Factor sobrante}}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$$

$$(b)\sqrt{75x^3} = \sqrt{\underbrace{25x^2}_{\text{Cuadrado Perfecto}} \cdot \underbrace{3x}_{\text{Factor sobrante}}} = \sqrt{(5x)^2 \cdot 3x} = 5x\sqrt{3x}$$

$$(c)\sqrt[4]{(5x)^4} = 5|x|$$

Ejemplo: Simplificar raíces impares

$$(a)\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\underbrace{8}_{\text{Cubo Perfecto}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Factor sobrante}}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$(b)\sqrt[3]{24a^4} = \sqrt[3]{\underbrace{8a^3}_{\text{Cubo Perfecto}} \cdot \underbrace{3a}_{\text{Factor sobrante}}} = \sqrt[3]{(2a)^3 \cdot 3a} = 2a\sqrt[3]{3a}$$

$$(c)\sqrt[3]{-40x^6} = \sqrt[3]{(-8x^6)\cdot 5}$$ Encontrar el máximo factor cúbico

$$= \sqrt[3]{(-2x^2)^3 \cdot 5}$$

$$= -2x^2\sqrt[3]{5}$$ Encontrar la raíz del cubo perfecto

Trabajo Práctico

Ejercicio 23: Simplifique cada expresión radical

1. $(a)\sqrt{20}$ $\quad$ $(b)\sqrt[3]{128}$
2. $(a)\ \sqrt[3]{\frac{16}{27}}$ $\quad$ $(b)\sqrt{\frac{75}{4}}$
3. $(a)\sqrt{54xy^4}$ $\quad$ (b) $\sqrt[3]{16x^5}$
4. $(a)\sqrt[4]{3x^4y^2}$ $\quad$ $(b)\sqrt[5]{160x^8z^4}$

Ejercicio 24: Simplifique cada expresión radical

Use las propiedades de radicales y simplifique cada expresión

$a)\ \left(\sqrt[5]{2}\right)^5$ $\quad$ $b)\ \sqrt[5]{96x^5}$

$c)\sqrt{12}\sqrt{3}$ $\quad$ $d)\ \sqrt[4]{(3x^2)^4}$

Se pueden combinar expresiones radicales (sumadas o restadas) si son radicales semejantes, es decir, si tienen índices y radicando iguales. Por ejemplo, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ y $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ son radicales semejantes, pero $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{6}$ son radicales diferentes. Para determinar si dos radicales se pueden combinar, primero se debe simplificar cada radical.

Ejemplo: Combinación de radicales

a. $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16\cdot 3} - 3\sqrt{9\cdot 3}$ — Encontrar factores cuadrados.

$= 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$ — Encontrar raíces cuadradas y multiplicar por coeficientes.

$= (8-9)\sqrt{3}$ — Combinar términos iguales.

$= -\sqrt{3}$ — Simplificar.

b. $\sqrt[3]{16x} - \sqrt[3]{54x^4} = \sqrt[3]{8\cdot 2x} - \sqrt[3]{27\cdot x^3\cdot 2x}$ — Encontrar factores cúbicos.

$= 2\sqrt[3]{2x} - 3x\sqrt[3]{2x}$ — Encontrar raíces cúbicas.

$= (2-3x)\sqrt[3]{2x}$ — Combinar términos iguales.

Trabajo Práctico

Ejercicio 25: Combinación de radicales

Simplifique cada expresión:

a. $\sqrt{27} + 5\sqrt{3} - \sqrt{300}$

b. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

c. $\sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{3}}$

e. $75^{1/2} + 48^{1/2}$

d. $-7\sqrt{80x} - 2\sqrt{125x}$

f. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}.(1-\sqrt{8})$

g. $10\sqrt{32} - 6\sqrt{18}$

h. $2\sqrt{50} + 12\sqrt{8}$

i. $\frac{3}{4}\sqrt{8a^3} - 5\sqrt[4]{64\,a^6} - \frac{1}{7}a\sqrt{8a}$

11.2. Exponentes Racionales

Definición de exponentes racionales

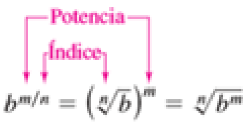
Si a es un número real y n es un número positivo tal que la $n-ésima\ raíz\ principal$ de a existe, entonces $a^{1/n}$ se define como

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}\text{ , donde } {}^{1}/_{n} \text{ es el exponente racional de } a.$$

Además, si m es un entero positivo que no tenga factor común con n, entonces

$$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{y} \quad a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

El numerador de un exponente racional denota la potencia a la que se eleva la base y el denominador denota el índice o la raíz que se toma.



Al trabajar con exponentes racionales, también se aplican las propiedades de los exponentes enteros. Por ejemplo, $3^{1/2}3^{1/3} = 3^{(1/2)+(1/3)} = 3^{5/6}$

Ejemplo: Cambiar de forma radical a exponencial

$$(a)\sqrt{3} = 3^{1/2}$$

$$(b)\ \sqrt{(3xy)^5} = \sqrt[2]{(3xy)^5} = (3xy)^{5/2}$$

$$(c)\ 2x\sqrt[4]{x^3} = (2x)\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = 2x^{1+3/4} = 2x^{7/4}$$

Ejemplo: Cambiar de forma radical a exponencial

$$(a)\ (x^2+y^2)^{3/2} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$$

$$(b)\ \ 2y^{3/4}z^{1/4} = 2(y^3z)^{1/4} = 2\sqrt[4]{y^3z}$$

$$(c)\ a^{-3/2} = \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

$$(d)\ \ x^{0.2} = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$$

Los exponentes racionales son útiles para reducir el índice, así como para simplificar expresiones.

Ejemplo: Simplificación con exponentes racionales

a. $(-32)^{-4/5} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^{-4} = (-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16}$

b. $(-5x^{5/3})(3x^{-3/4}) = -15x^{(5/3)-(3/4)} = -15x^{11/12}, \quad x \neq 0$

c. $\sqrt[9]{a^3} = a^{3/9} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ Reducir índice.

d. $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{(5)^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

e. $(2x-1)^{4/3}(2x-1)^{-1/3} = (2x-1)^{(4/3)-(1/3)}$

$= 2x - 1, \quad x \neq \dfrac{1}{2}$

Trabajo Práctico

Ejercicio 26: Simplificación con exponentes racionales

Escriba cada una de las expresiones con radicales usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

Expresión con radicales	Expresión con exponentes
$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
$\sqrt[3]{15^2}$	
	$8^{2/3}$
	$11^{-1/2}$
$\sqrt[5]{a}$	

Ejercicio 27: Simplificación con exponentes racionales

Evalúe las siguientes expresiones sin usar calculadora:

a. $27^{1/3} =$

b. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1/2} =$

c. $32^{-3/5} =$

d. $\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right)^{-2/5} =$

e. $\left(-\frac{1}{64}\right)^{-1/3} =$

f. $\left(-\frac{125}{27}\right)^{-1/3} =$

g. $-\left(\frac{1}{125}\right)^{-4/3} =$

h. $100^{-3/2} =$

Ejercicio 28: Simplificación con exponentes racionales

Realice las operaciones y simplifique

1. $(a)\ \dfrac{(2x^2)^{3/2}}{2^{3/2}x^4}$ $\quad (b)\ \dfrac{x^{4/3}y^{2/3}}{(xy)^{1/3}}$

2. $(a)\ \dfrac{x^{-3}.x^{1/2}}{x^{3/2}.x^{-1}}$ $\quad (b)\ \dfrac{5^{-1/2}.5x^{5/2}}{(5x)^{3/2}}$

Ejercicio 29: Reducir el índice usando exponentes racionales

Reduzca el índice de cada radical

1. $(a)\sqrt[4]{3^2}$ $\qquad(b)\sqrt[6]{(x+1)^4}$
2. $(a)\sqrt[6]{x^3}$ $\qquad(b)\sqrt[4]{(3x^2)^4}$

Ejercicio 30: Escribir como un solo radical usando propiedades de los radicales

Escriba cada expresión como un solo radical. A continuación, simplifique su respuesta

1. $(a)\sqrt{\sqrt{32}}$ $\qquad(b)\sqrt{\sqrt[4]{2x}}$
2. $(a)\sqrt{\sqrt{243(x+1)}}$ $\qquad(b)\sqrt{\sqrt[3]{10a^7b}}$

11.3. Racionalización de denominadores y numeradores

Para racionalizar un denominador o numerador de la forma $a-b\sqrt{m}$ o $a+b\sqrt{m}$, multiplique numerador y denominador por un conjugado: $a+b\sqrt{m}$ y $a-b\sqrt{m}$ son conjugados entre sí. Si $a=0$, entonces el factor racionalizador para $\sqrt{m}$ es el mismo, $\sqrt{m}$. Para raíces cúbicas escoja un factor racionalizador que generre un cubo perfecto,

Ejemplo: Racionalizar denominadores de un solo término

Racionalice el denominador de cada expresión

$(a)\frac{5}{2\sqrt{3}}$ $\qquad(b)\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

Solución

a. $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt{3}\ es\ el\ factor\ racionalizador$

$\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2(3)}$ $\qquad$ *Multiplicar numerador y denominador factor racionalizador*

$\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ $\qquad$ *Expresión racionalizada*

b. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ $\qquad \sqrt[3]{5^2}\ es\ el\ factor\ racionalizador$

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$ $\qquad$ *Multiplicar numerador y denominador factor racionalizador*

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ $\qquad$ *Expresión racionalizada*

Ejemplo: Racionalizar denominadores con dos términos.

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$ *Multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador*

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{3.3+3(-\sqrt{7})+3\sqrt{7}-\sqrt{7}\sqrt{7}}$ *Aplicar propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.*

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}$

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7}$ *Simplificar.*

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{2}$

$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \mathbf{3-\sqrt{7}}$ *Expresión racionalizada*

Trabajo Práctico

Ejercicio 31: Racionalice el denominador de la expresión

Racionalice las siguientes expresiones

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b. $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$

c. $\frac{5}{\sqrt{14}-2}$

d. $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

Ejercicio 32: Racionalice el denominador de la expresión

Racionalice el denominador de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt{\frac{x}{7}}$

c. $\frac{1}{y^{2/5}}$

d. $\frac{2x}{\sqrt{x}}$

e. $\frac{3}{\sqrt{5}-1}$

f. $\frac{5}{3\sqrt{2}-1}$

g. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

h. $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

i. $\frac{8}{a^{1/3}}$

j. $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$

k. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Trabajo Práctico
Ejercicios Adicionales

Ejercicio 33: Calcule, sin usar calculadora.

a. -3^2 b. $(-6)^0$ c. $(-3)^2$

d. $5^2.(1/5)^3$ e. $\frac{7^7}{7^5}$ f. $\frac{4}{4^{-2}}$

g. $(3/2)^{-2}.\frac{9}{16}$ h. $\sqrt[4]{16}$ i. $(1/16)^{1/4}$

j. $\sqrt[3]{\frac{-1}{64}}$ k. $\frac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$ l. $\sqrt{7}.\sqrt{28}$

Ejercicio 34: Indique verdadero (V) o falso (F), en caso de ser F escribe la expresión correcta.

		Expresión correcta			Expresión correcta
a) $(a^2b^3) = (a.b)^5$			b) $0^4 = 0$		
c) $\left(\frac{13}{169}x^{-1}\right)^{-1} = 13x$			d) $(-3)^{-2} = \frac{1}{3}^{-2}$		
e) $-(-4)^0 = -1$			f) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$		
g) $\frac{3+5}{4} = \frac{3}{4}+\frac{5}{4}$			h) $[a\,(-b)]^2 = a^2b^2$		
i) $(b/a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$			j) $\frac{0}{5} = 0$		
k) $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{b}$			l) $1+\frac{2a}{a+c} = \frac{3a+c}{a+c}$		
m) $\frac{4a}{b} = \frac{4}{b}.\frac{a}{b}$			n) $\frac{a+b+6}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{6}{c}$		
o) $3x^2 = x^2+x^2+x^2$			p) $\frac{5}{0} = 0$		

Ejercicio 35: Calcule el valor exacto sin usar calculadora.

a) $-6.3-(-5).[-9:(-3)]$

b) $\left(\frac{-16}{2}+4\right):4-\left(\frac{2-5}{-4}.2+\frac{3}{2}\right)$

d) $\frac{49}{5}:7+\left(3-\frac{11}{7}\right):\left(\frac{14}{49}+\frac{3}{7}:\frac{7}{12}\right)$

e) $(-4).\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2\right\}^{-2} =$

c) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{-15}+3^{-3}\right)}-\ 2:\left|\frac{3}{4}-1\right|^{-1}$ f) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}:\sqrt[4]{3^{-1}}\right)^{4/7}$

d) $144^{1/2}-[(3-9)+8]:(\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{243}-7)$

Ejercicio 36: Simplifique cada expresión y elimine todos los exponentes negativos. (Suponga que las letras representan números positivos)

a) $(c^3d)^{-1/3}$ b) $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

c) $\left(\frac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$ d) $\left(\frac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$

BIBLIOGRAFÍA

- STEWART, J y Otros. (2001). *Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.*

- LARSON, R y Otros. (2012). *Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A.* de C.V.

- BIANCHINI &PACCOLA (1993) *Matemática (1ra. Ed.) Brasil, Recife -PE, Editora Moderna Ltda.*