UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

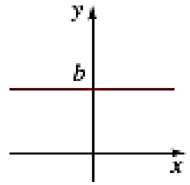
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Introducción a la matemática

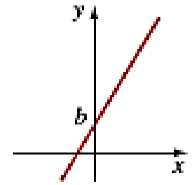
Unidad 3 b

Obtenido de "Precálculo" - 5ta Ed - Stewart - Redlin - Watson

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$

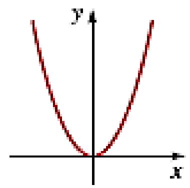


$f(x) = b$

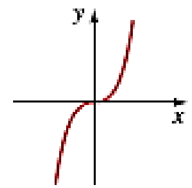


$f(x) = mx + b$

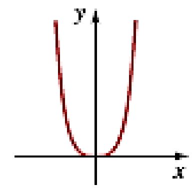
Funciones exponenciales
$f(x) = x^n$



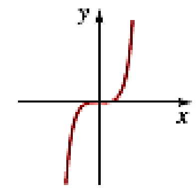
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$

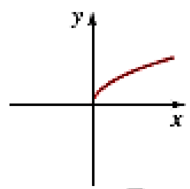


$f(x) = x^4$

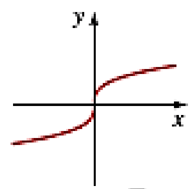


$f(x) = x^5$

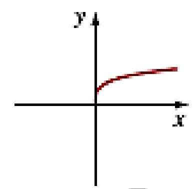
Funciones de raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



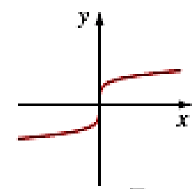
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

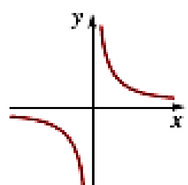


$f(x) = \sqrt[4]{x}$

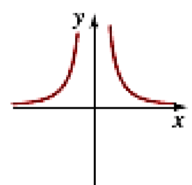


$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = 1/x^n$

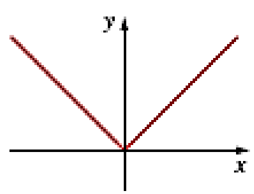


$f(x) = \frac{1}{x}$



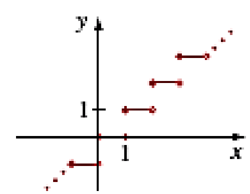
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



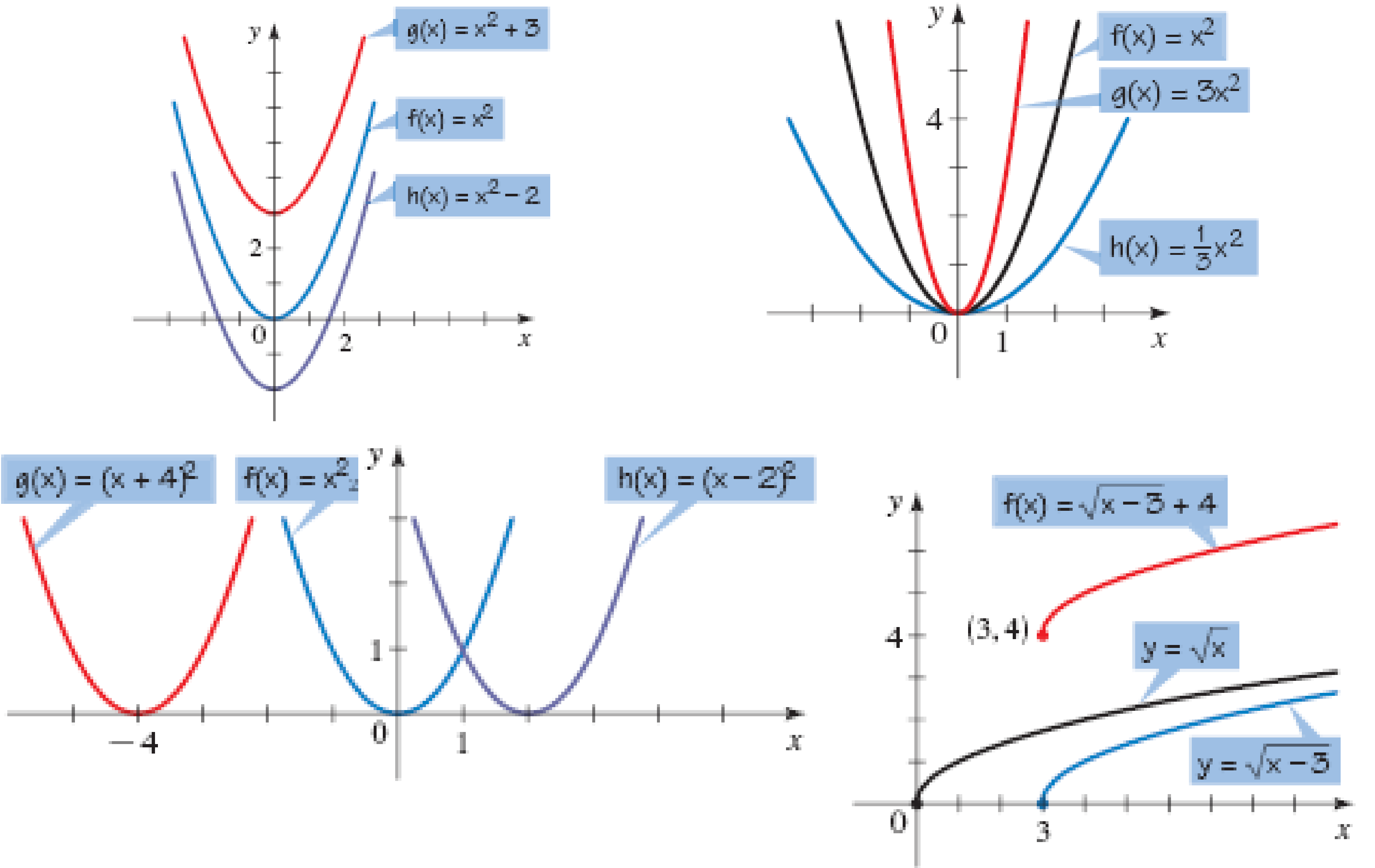
$f(x) = |x|$

Función entero máximo
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

Transformaciones

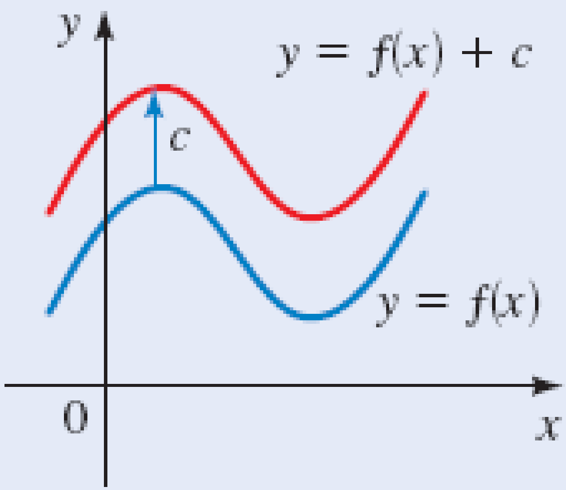


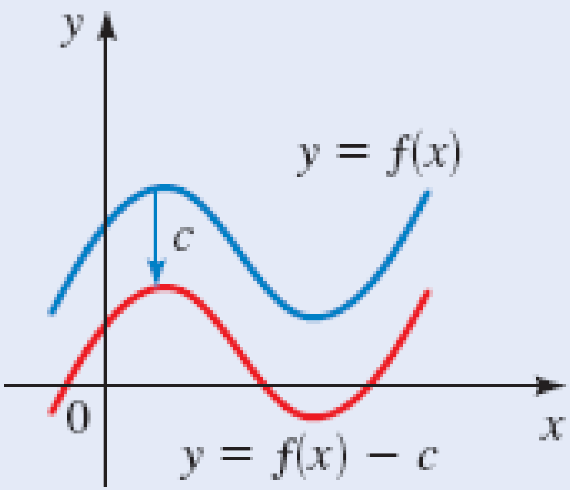
Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



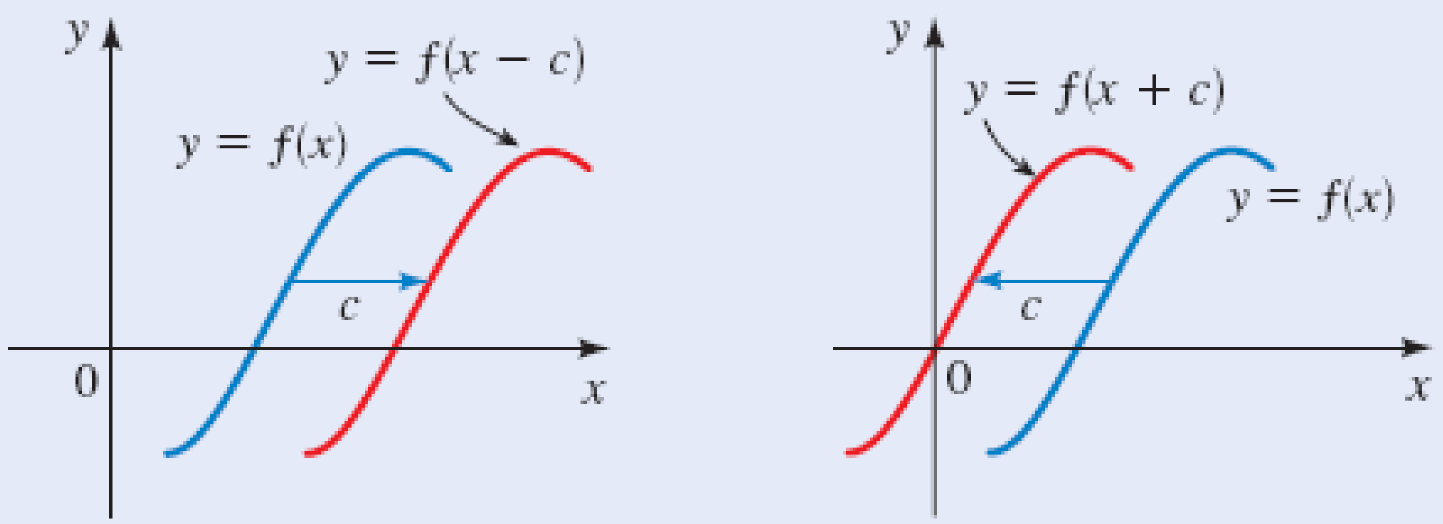


Desplazamientos horizontales de gráficas

Supóngase que $c > 0$.

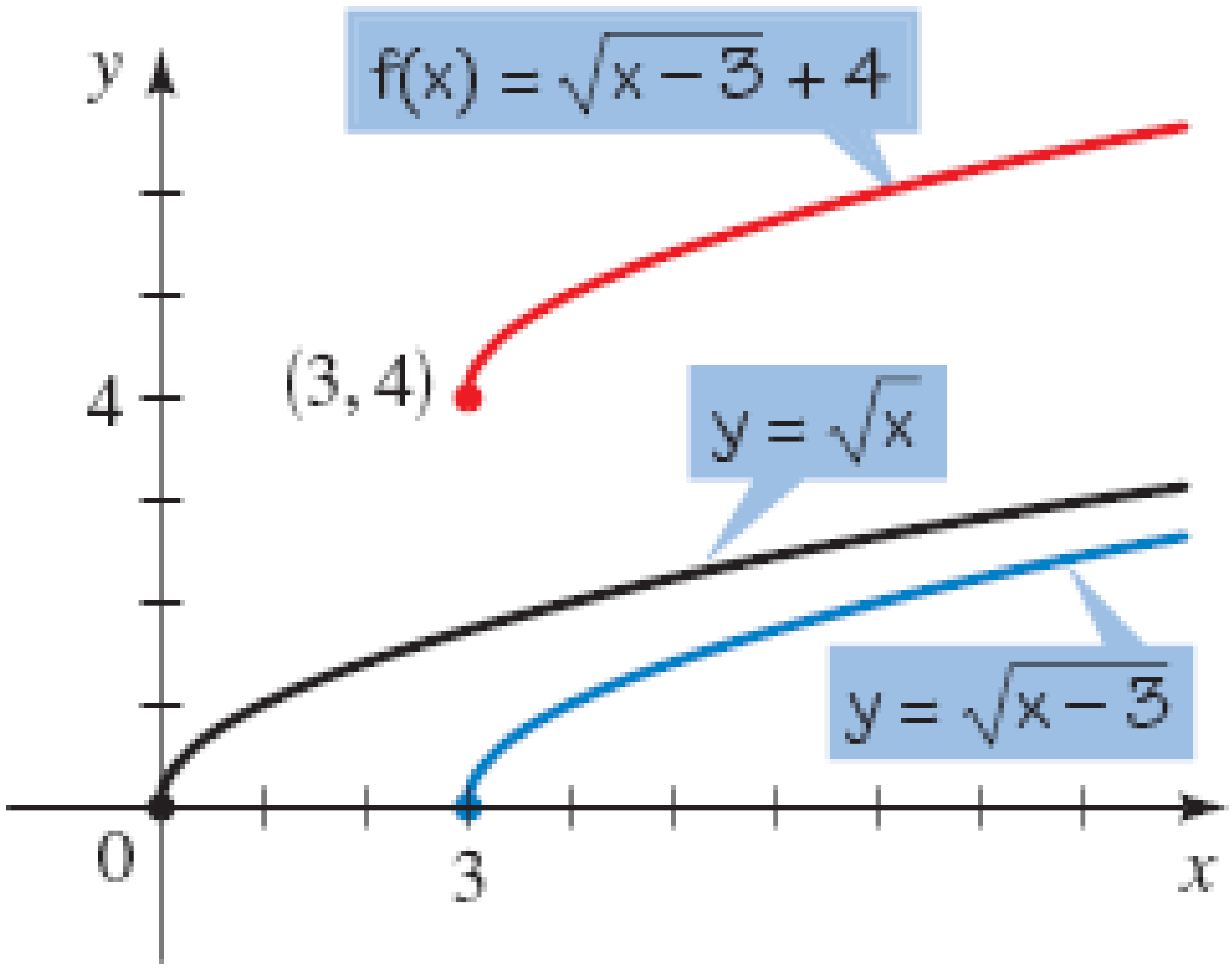
Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



$y = f(x - c)$	$y = f(x + c)$
$y = (x - 2)^2$	$y = (x + 2)^2$
$0 = (x - 2)^2$	$0 = (x + 2)^2$
$\sqrt{0} = x - 2$	$\sqrt{0} = x + 2$
$0 + 2 = x$	$0 - 2 = x$
$2 = x$	$-2 = x$

Combinación



Combinación

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x+3} - 4$$

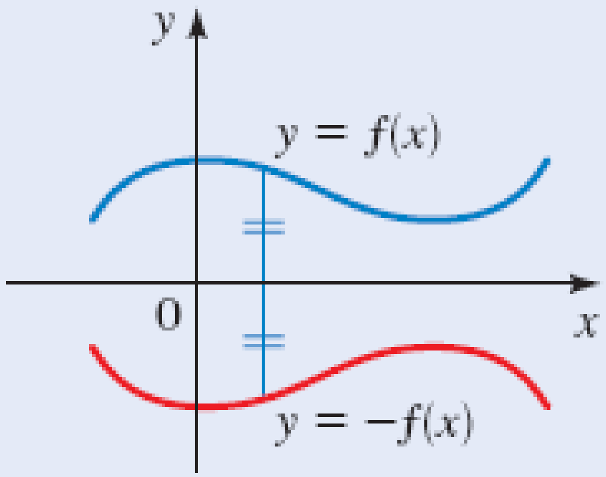
DH

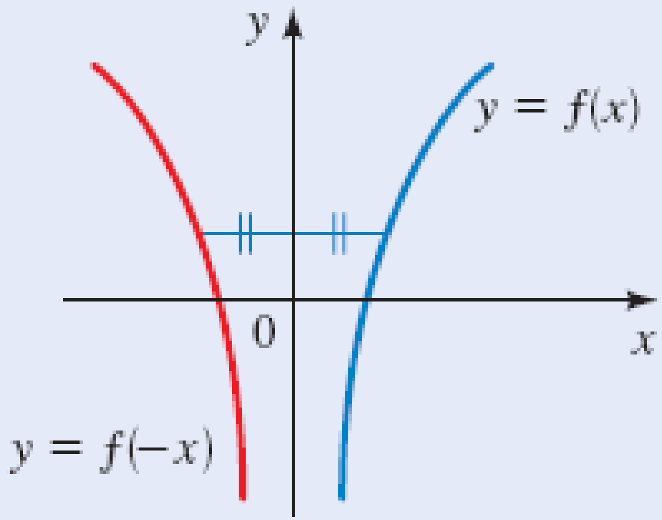
DV

Reflexión de gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



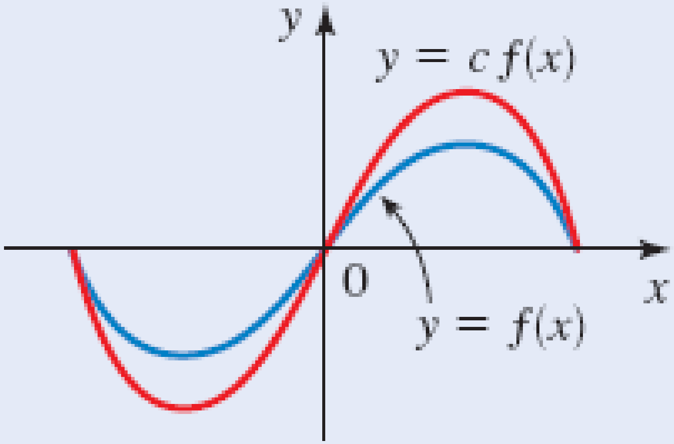


Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

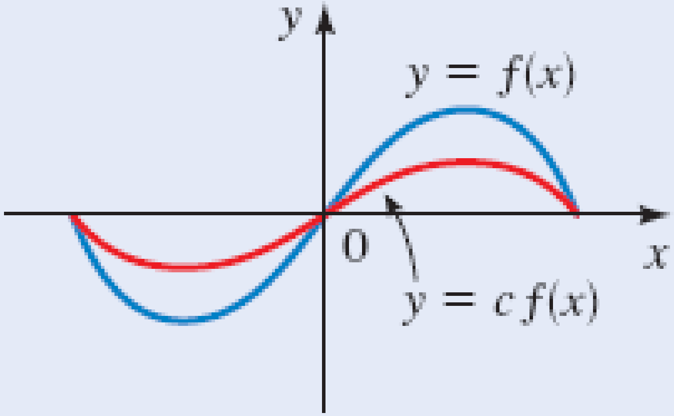
Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.



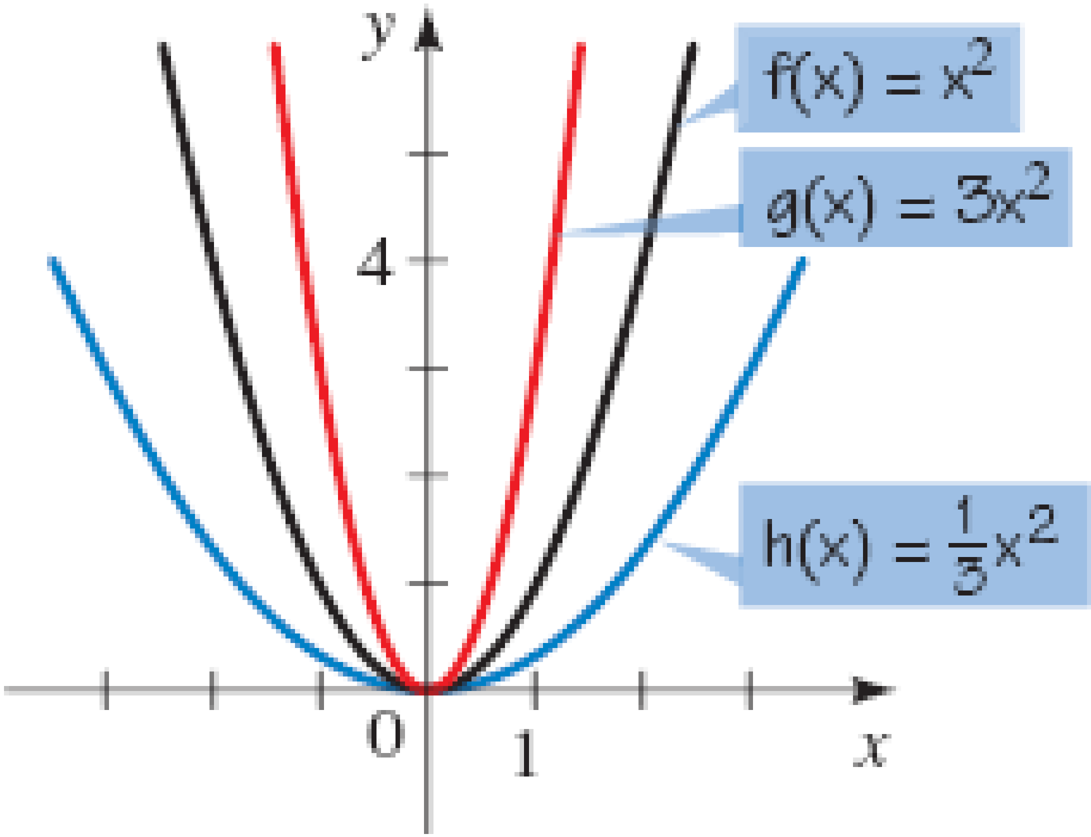
$c > 1$



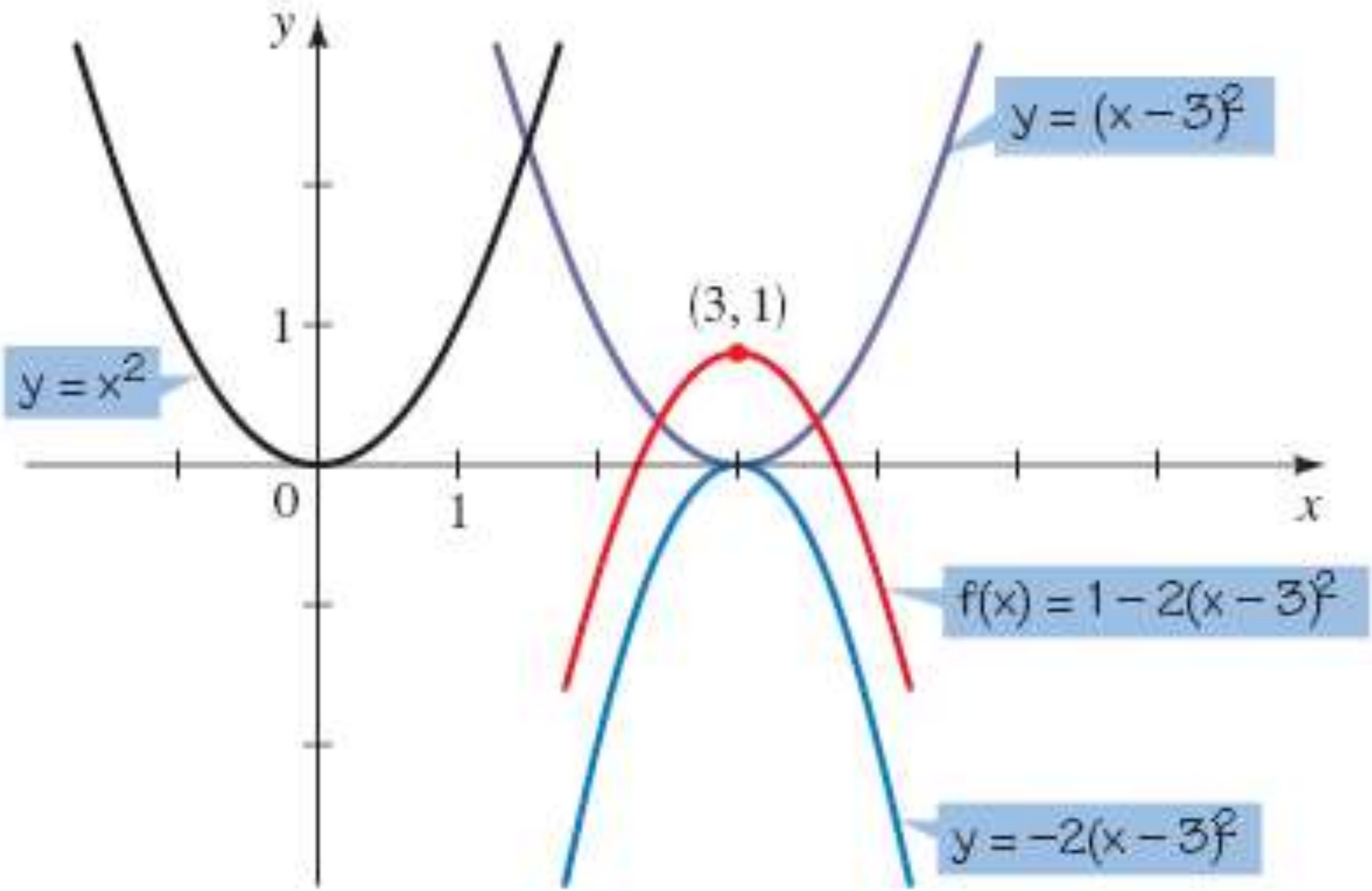
$0 < c < 1$

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 3x^2$ b) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$



Combinación

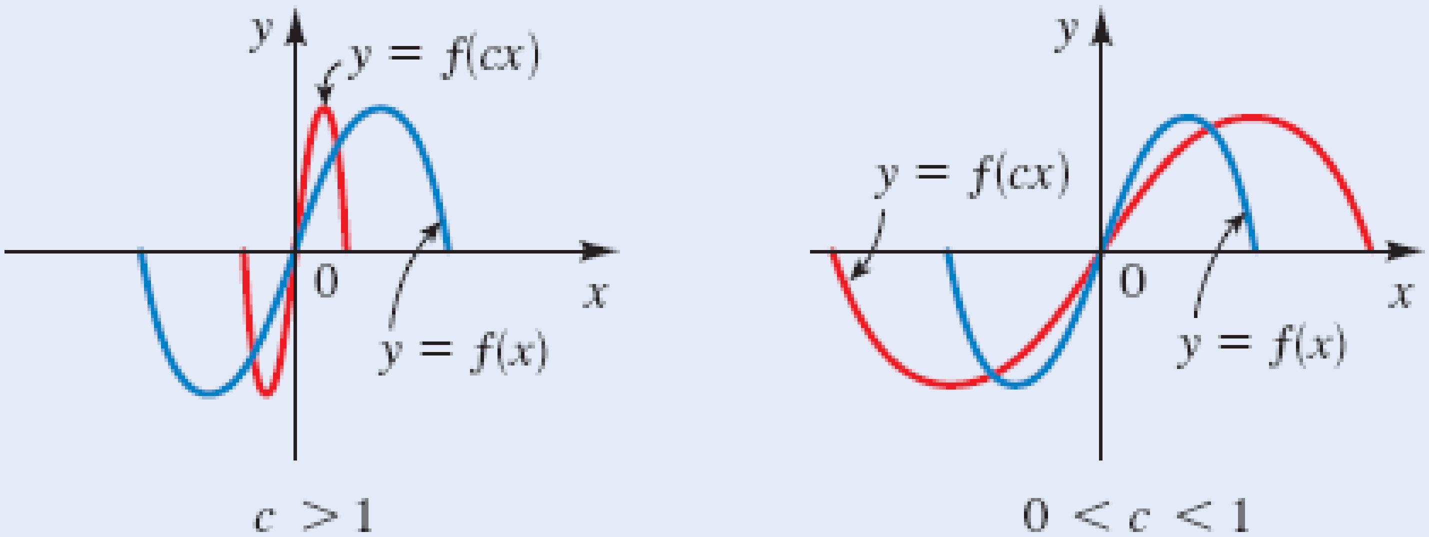


Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

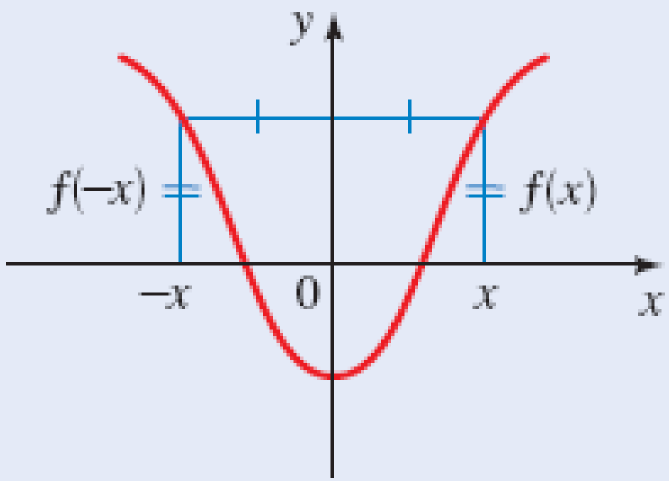


Funciones par e impar

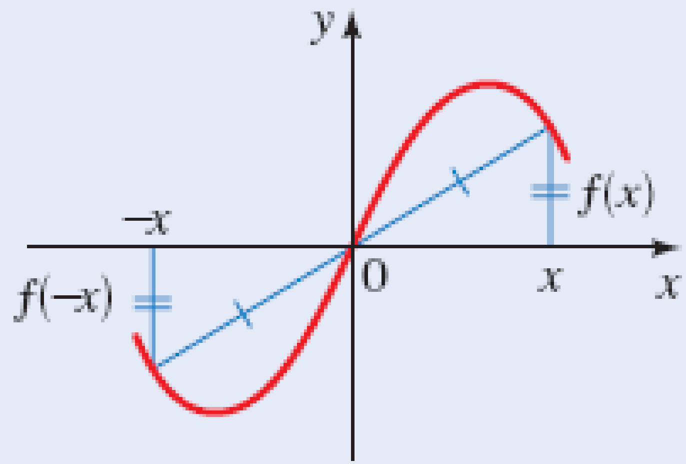
Sea f una función.

f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f



La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.



La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Determine si las funciones son par, impar o ni par ni impar.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

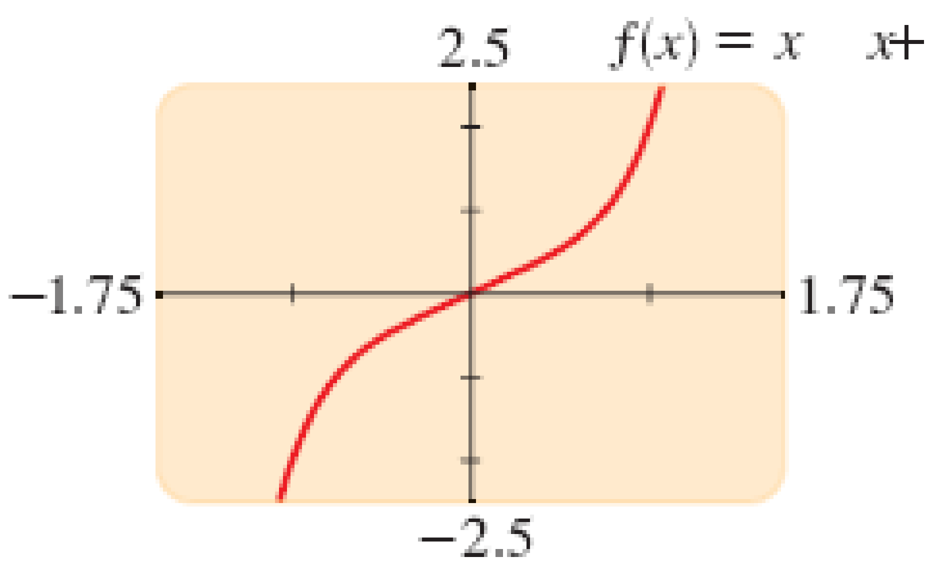
Por lo tanto, f es una función impar.

b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

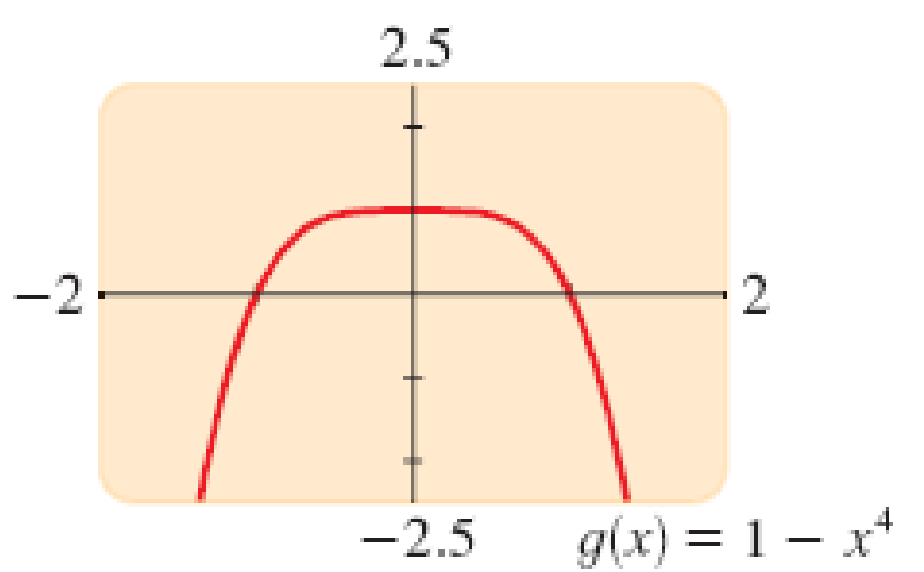
Por lo tanto g es par.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

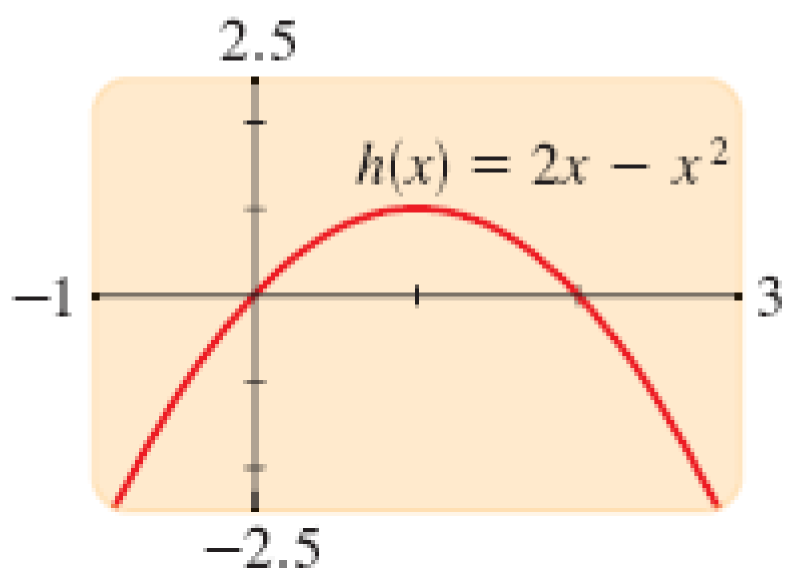
Puesto que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar.



a)



b)



c)

Modelado

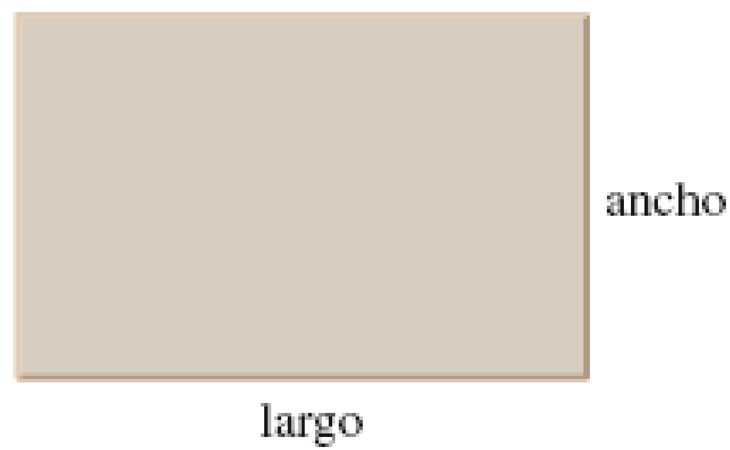
Razonamiento acerca del problema

Si el jardinero cerca una parcela de 10 pies de ancho, entonces la longitud debe ser de 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Por lo tanto, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

En la tabla se muestran varias elecciones para cercar el jardín. Se puede observar que cuando se incrementa la amplitud, se incrementa el área cercada, luego disminuye.

Ancho	Largo	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600



Normas para modelar con funciones

1. **Exprese el modelo en palabras.** Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela, en palabras, como una función de otras cantidades en el problema.
2. **Elija la variable.** Identifique las variables empleadas para expresar la función en el paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de este símbolo.
3. **Establezca el modelo.** Exprese la función en el lenguaje del álgebra al escribirla como una función de la única variable elegida en el paso 2.
4. **Use el modelo.** Emplee la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, use los métodos algebraico o gráfico descritos en la sección 2.5.)

Modelado

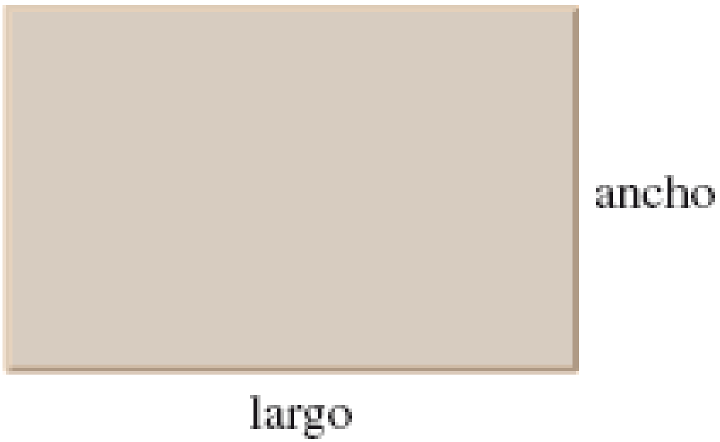
Razonamiento acerca del problema

Si el jardinero cerca una parcela de 10 pies de ancho, entonces la longitud debe ser de 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Por lo tanto, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

En la tabla se muestran varias elecciones para cercar el jardín. Se puede observar que cuando se incrementa la amplitud, se incrementa el área cercada, luego disminuye.

Ancho	Largo	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600



Solución

a) Para hallar la función que modela el volumen de la caja, se usan los siguientes pasos.

- **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que el volumen de una caja rectangular es

$$\boxed{\text{volumen}} = \boxed{\text{profundidad}} \times \boxed{\text{ancho}} \times \boxed{\text{altura}}$$

- **Elija la variable**

Hay tres cantidades variables: ancho, profundidad y altura. Puesto que la función que se desea depende de la profundidad, sea

$$x = \text{profundidad de la caja}$$

Entonces se expresan las otras dimensiones de la caja en términos de x.

En palabras	En álgebra
Profundidad	x
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

Establezca el modelo

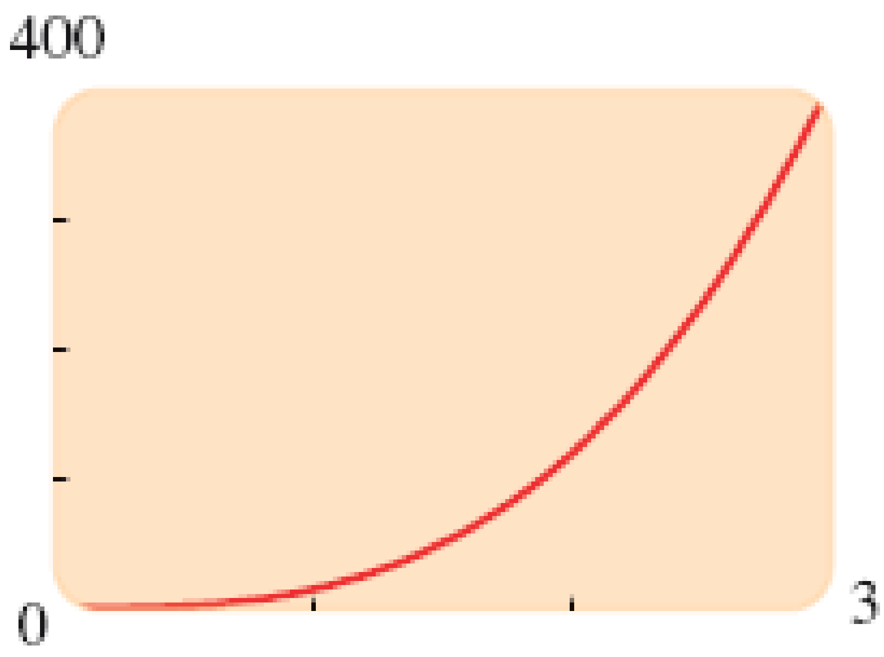
El modelo es la función V que da el volumen de la caja en términos de la profundidad x.

$$\boxed{\text{volumen}} = \boxed{\text{profundidad}} \times \boxed{\text{ancho}} \times \boxed{\text{altura}}$$

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja se modela mediante la función $V(x) = 15x^3$. La función V se grafica en la figura 1.



Combinación de funciones

Álgebra de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g se definen como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Dominio } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

Composición de funciones

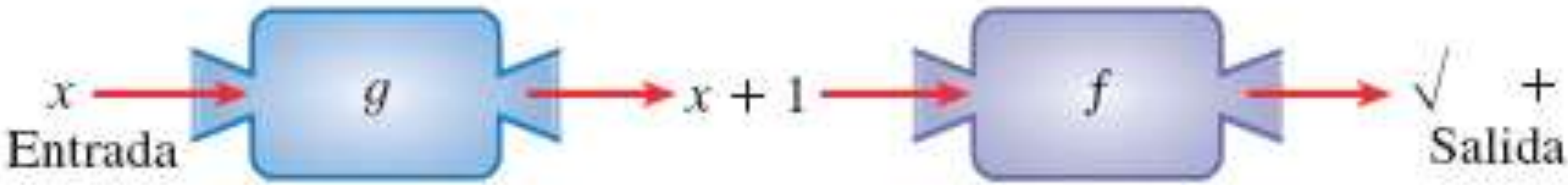
Suponer:

$$f_{(x)} = \sqrt{x}$$

$$g_{(x)} = x^2 + 1$$

Puedo definir:

$$h_{(x)} = f_{(g_{(x)})} = f_{(x^2+1)} = \sqrt{x^2 + 1}$$



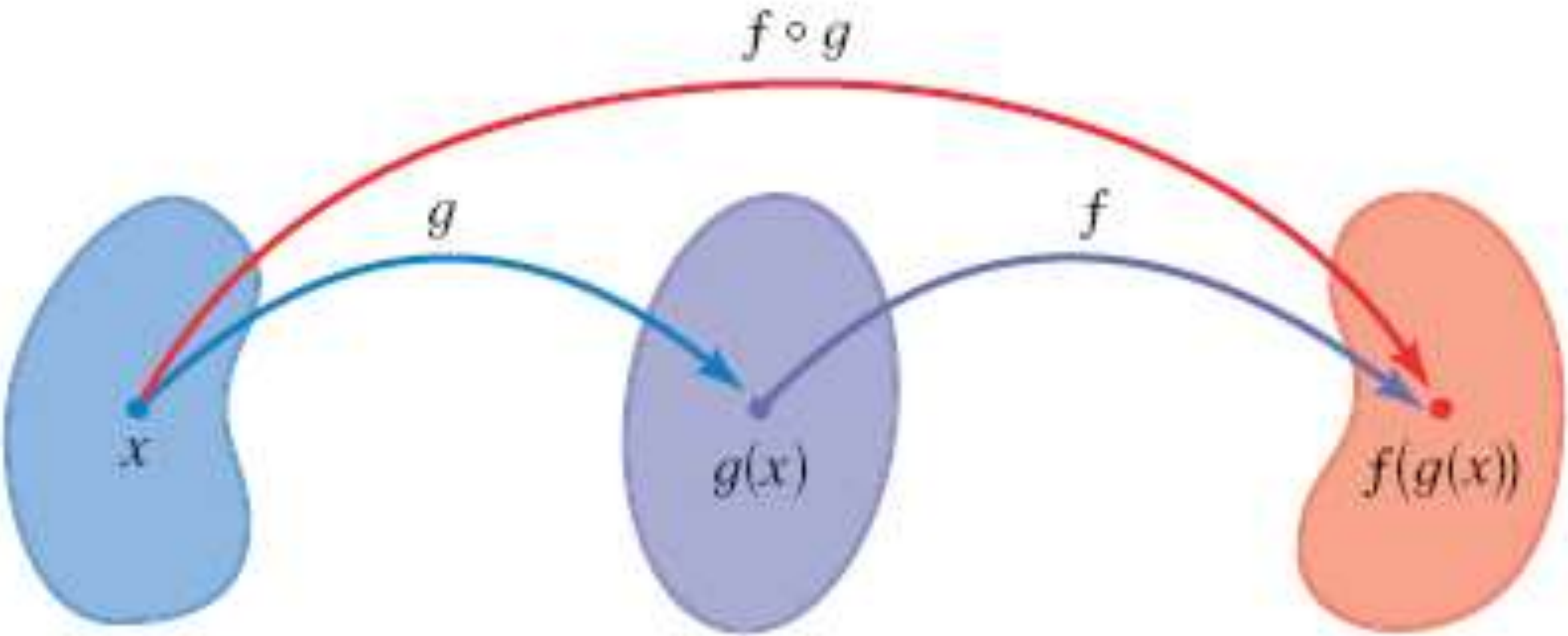
x
Entrada
g
$x + 1$
f
$\sqrt{} \quad +$
Salida

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (denominada también la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras $(f \circ g)(x)$ se define siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. Se puede ilustrar $f \circ g$ por medio de un diagrama de flecha (figura 4).



Ejemplo 3 Determine la composición de funciones

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

b) Halle $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

Solución

a) Se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(x - 3) && \text{Definición de } g \\
&= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(x^2) && \text{Definición de } f \\
&= x^2 - 3 && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

b) Halle $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

b) Se tiene

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

■

Del ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y después f.


Recreo