UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

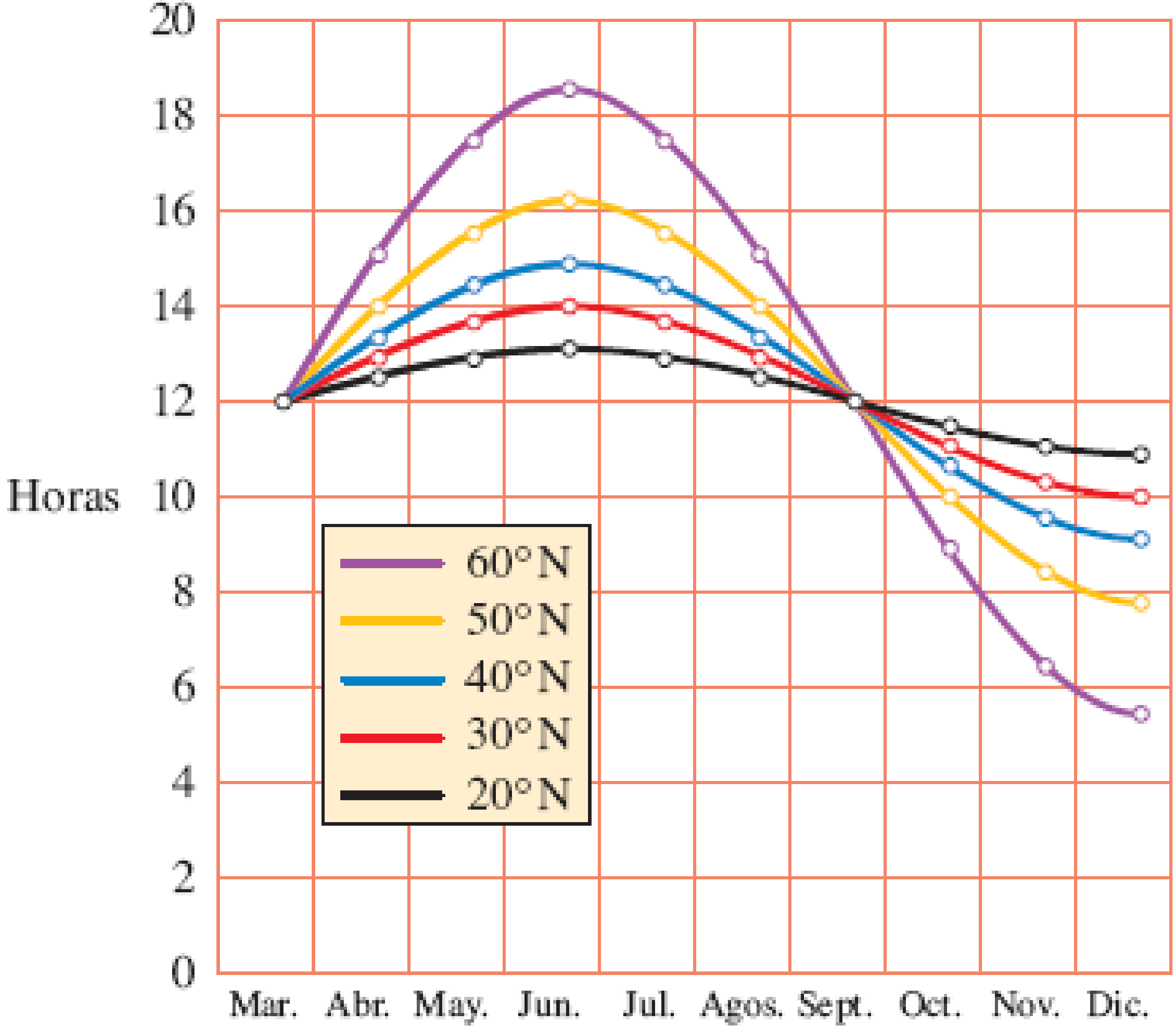
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Introducción a la matemática

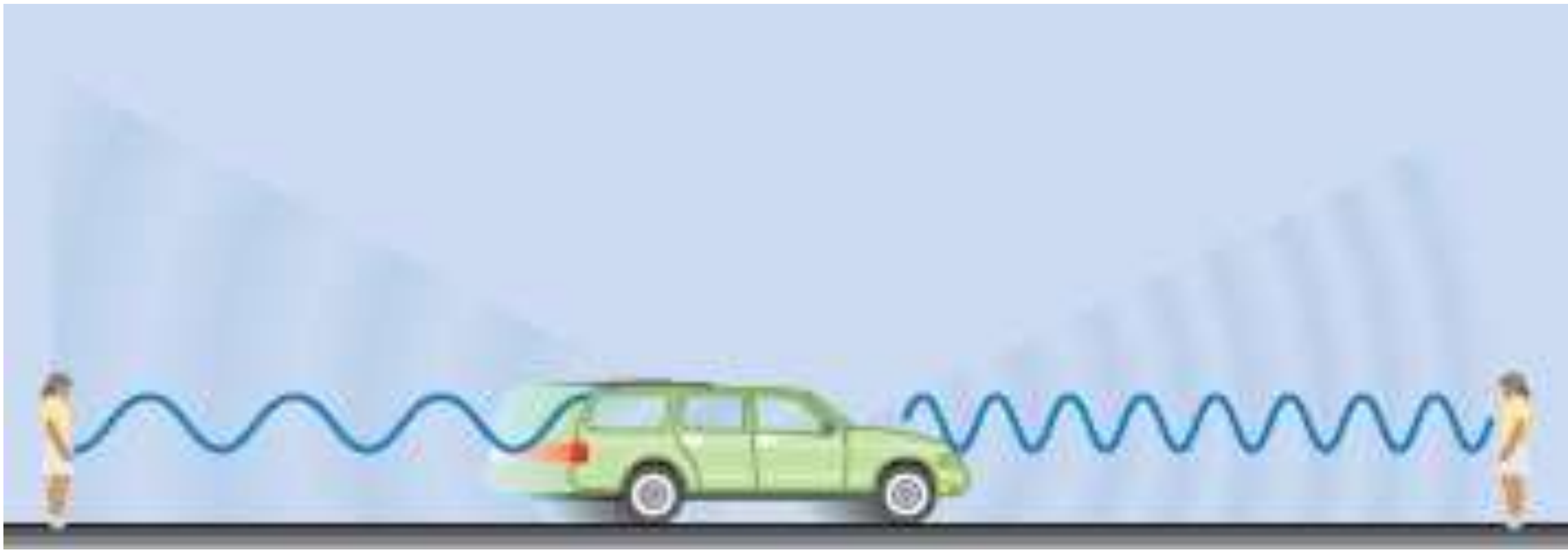
Unidad 5 a

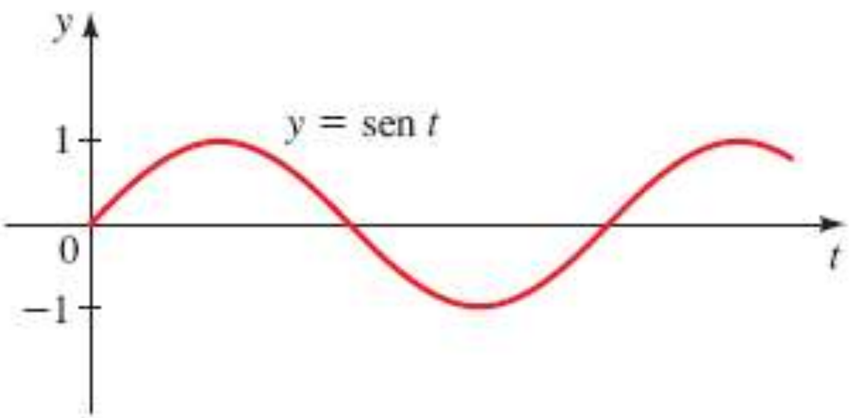
2016

Trigonometría

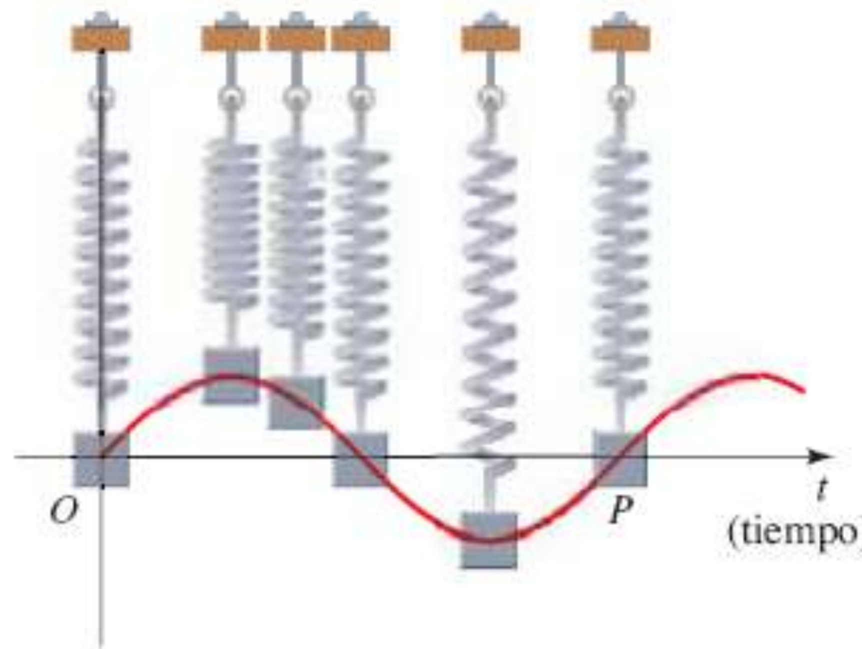


Horas
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
60° N
50° N
40° N
30° N
20° N
Mar.
Abr.
May.
Jun.
Jul.
Agos.
Sept.
Oct.
Nov.
Dic.

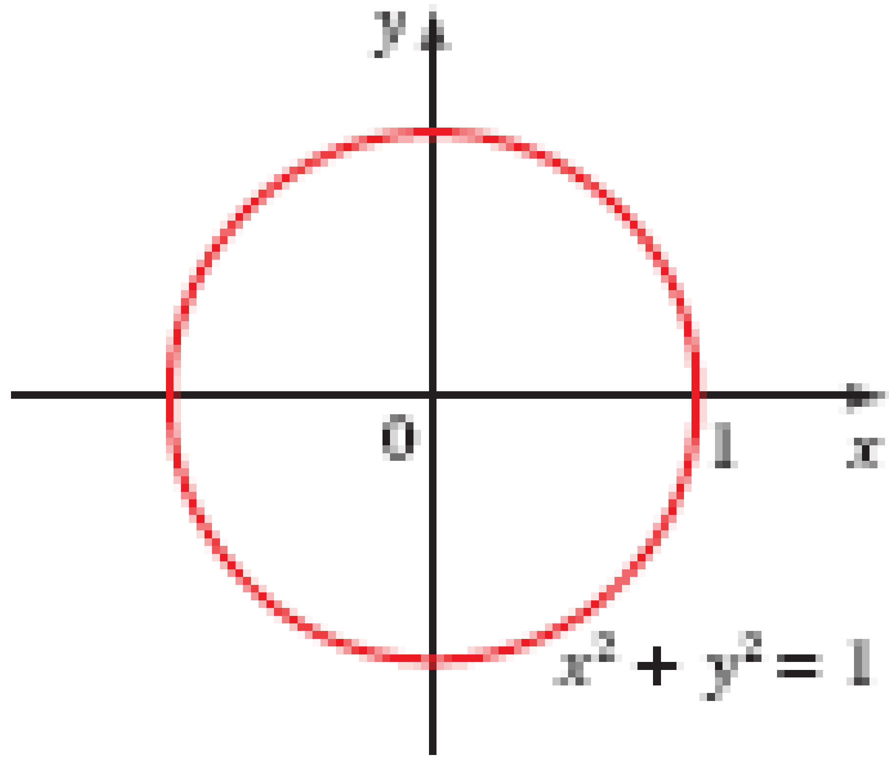




y
y = sen t
1
0
−1
t



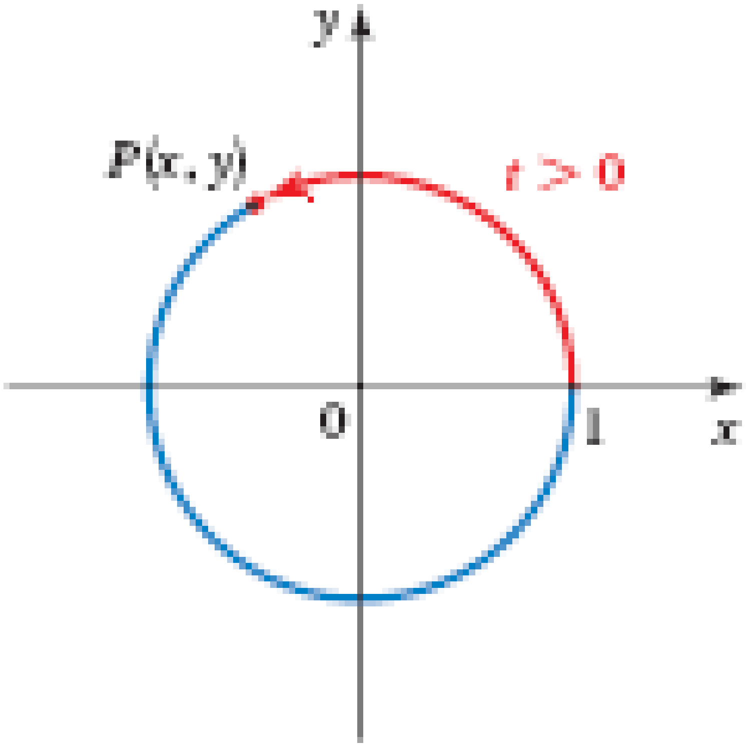
O
P
t
(tiempo)



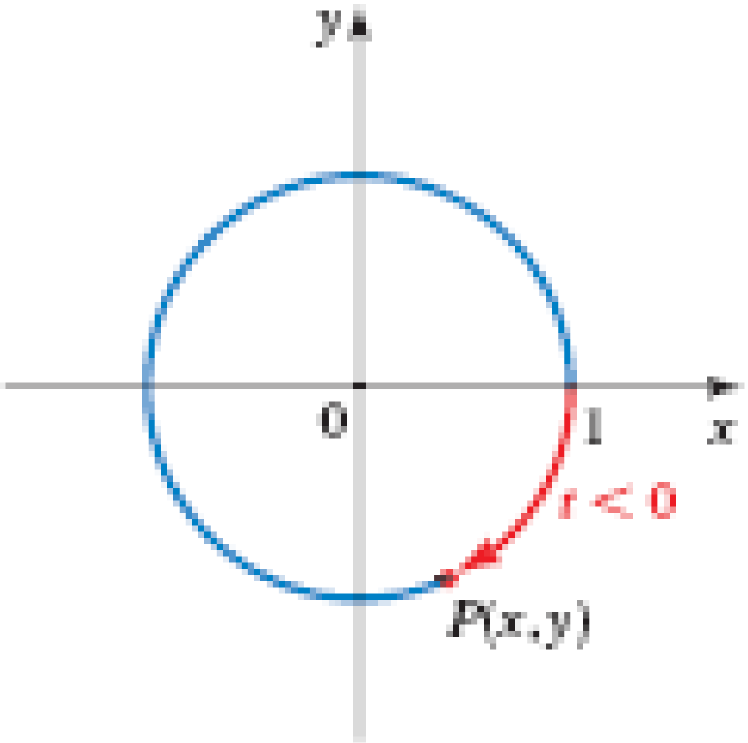
Círculo unitario

El círculo unitario es el que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$



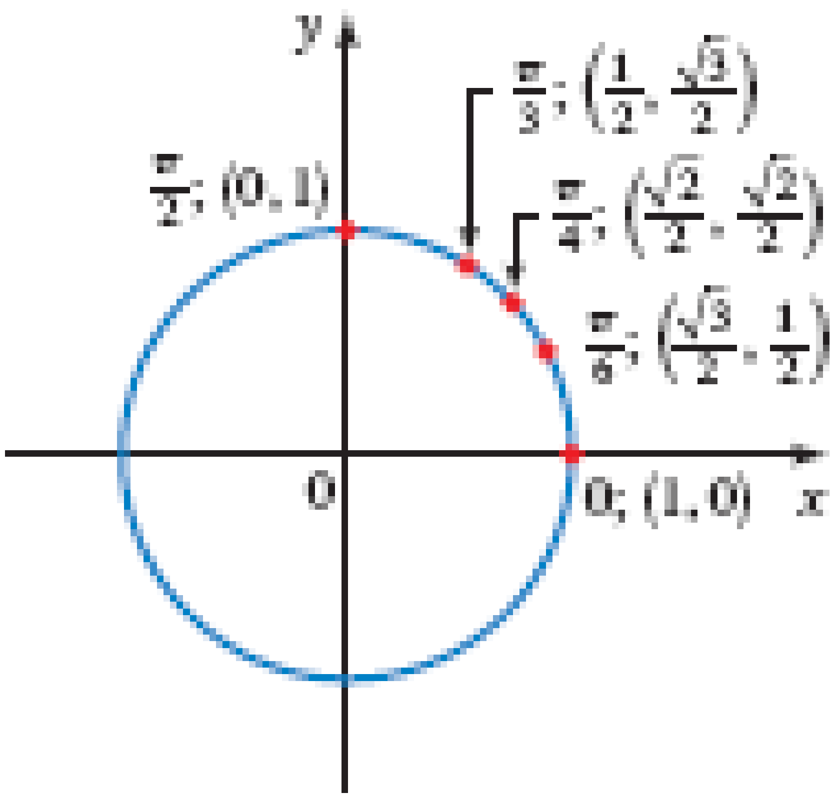
a) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t > 0$

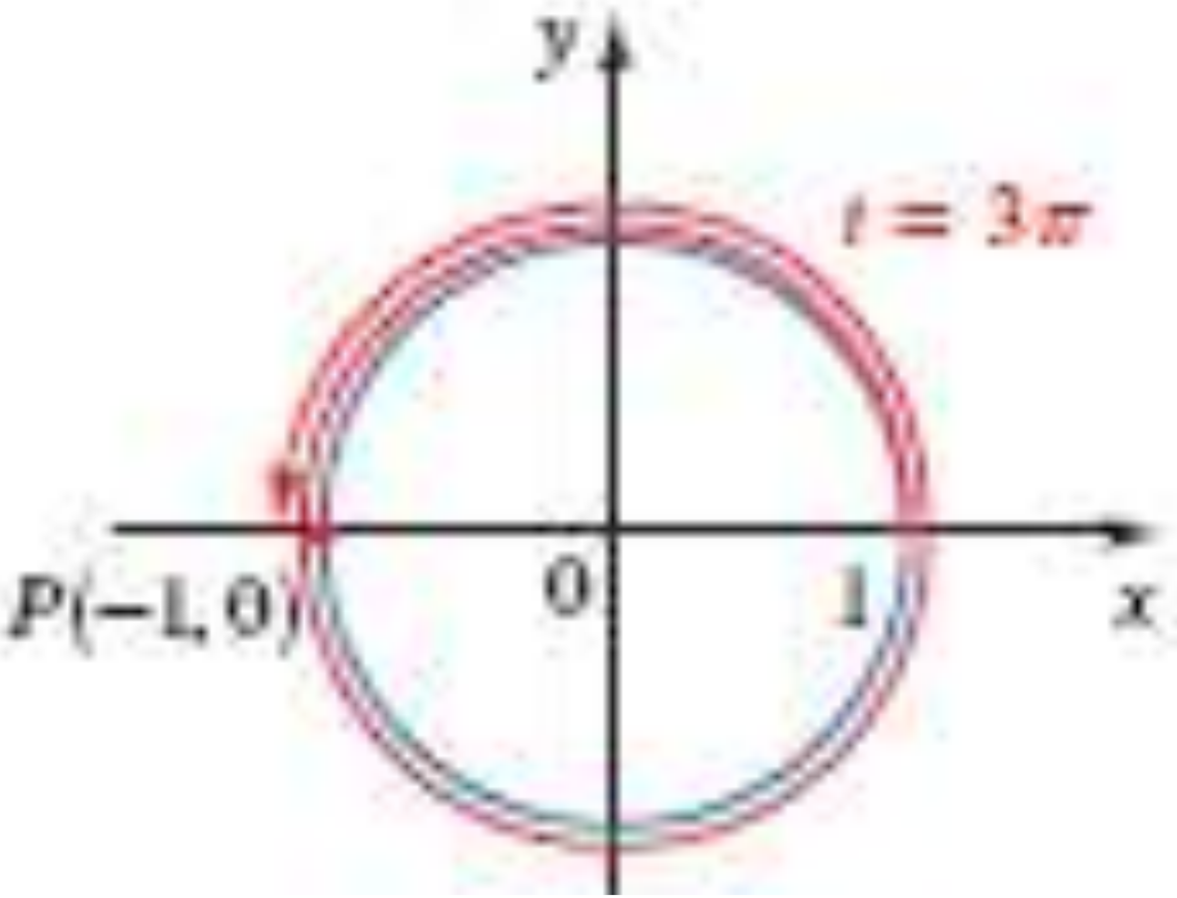


b) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t < 0$

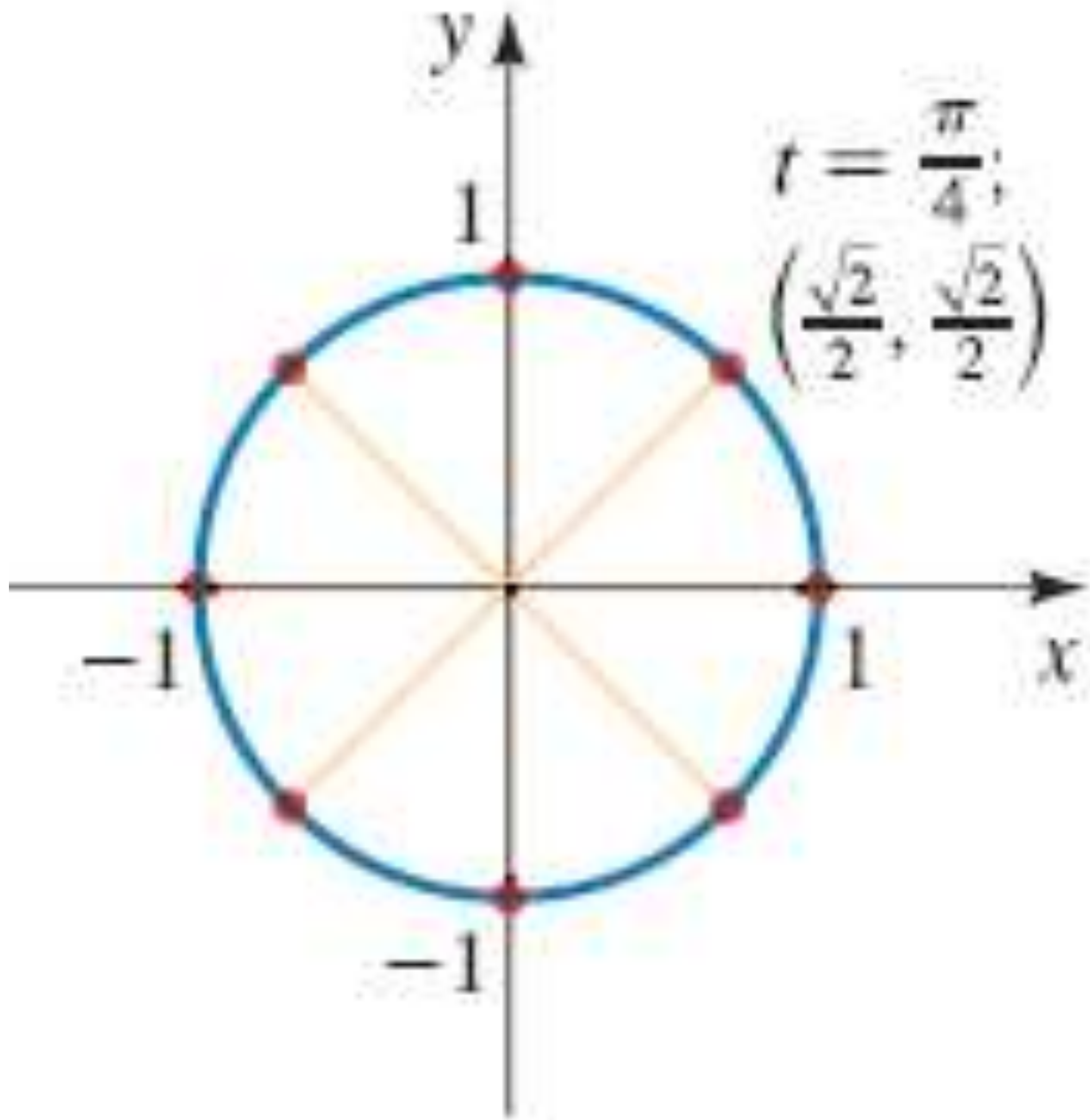
Tabla 1

t	Punto determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

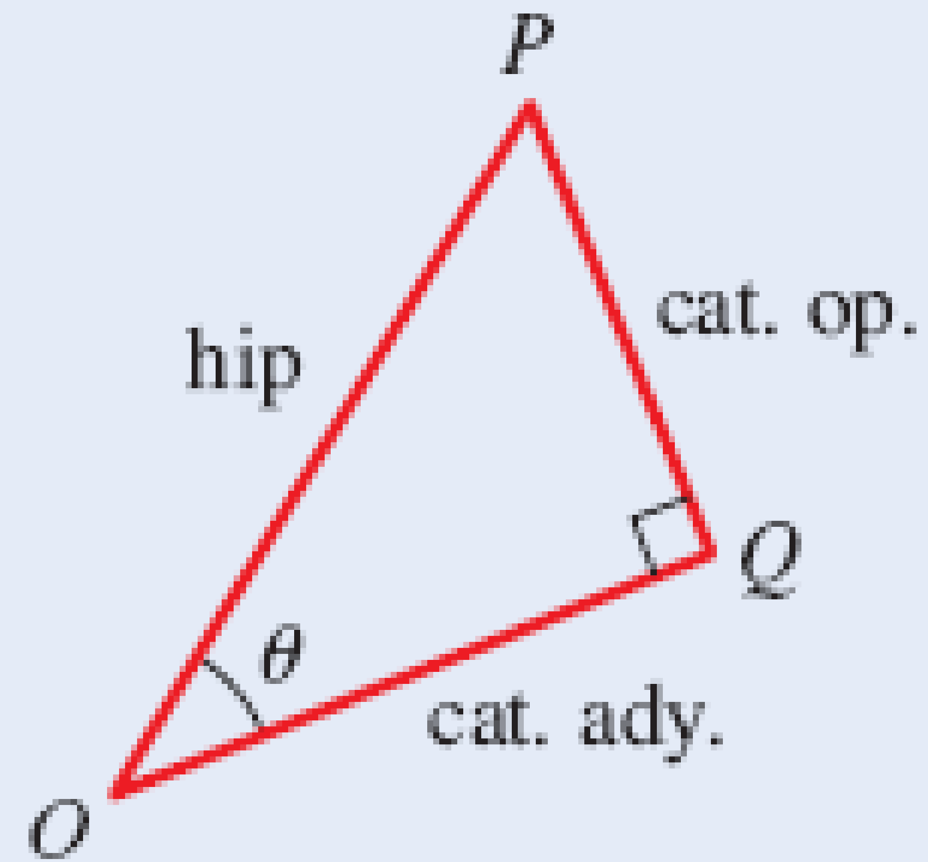




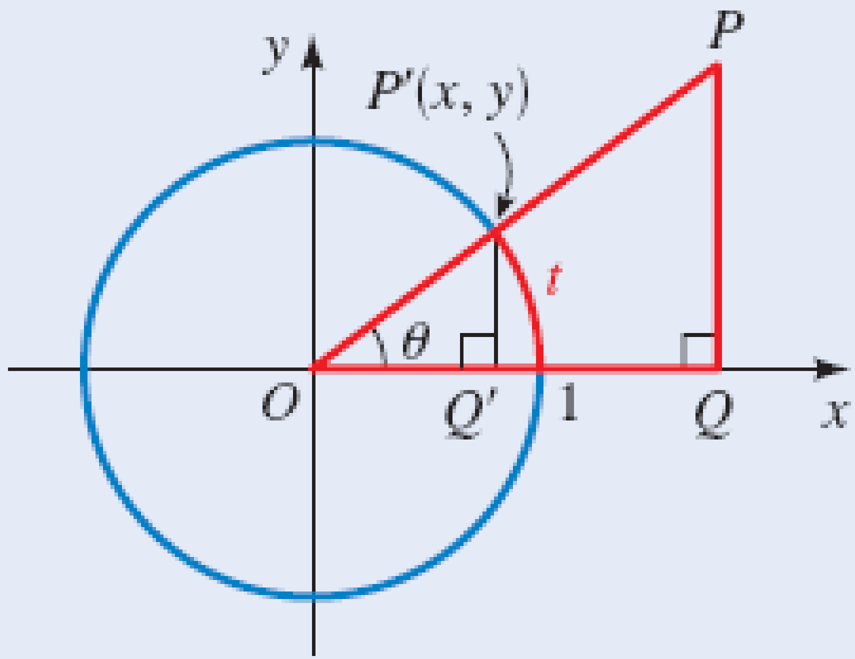
y
$t = 3\pi$
$P(-1, 0)$
0
1
x



y
x
1
−1
1
−1
$t = \frac{\pi}{4}$;
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Triángulo rectángulo *OPQ*



$P'(x, y)$ es el punto determinado por t.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \cdot = \frac{x}{1} = x$$

Definición de las funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

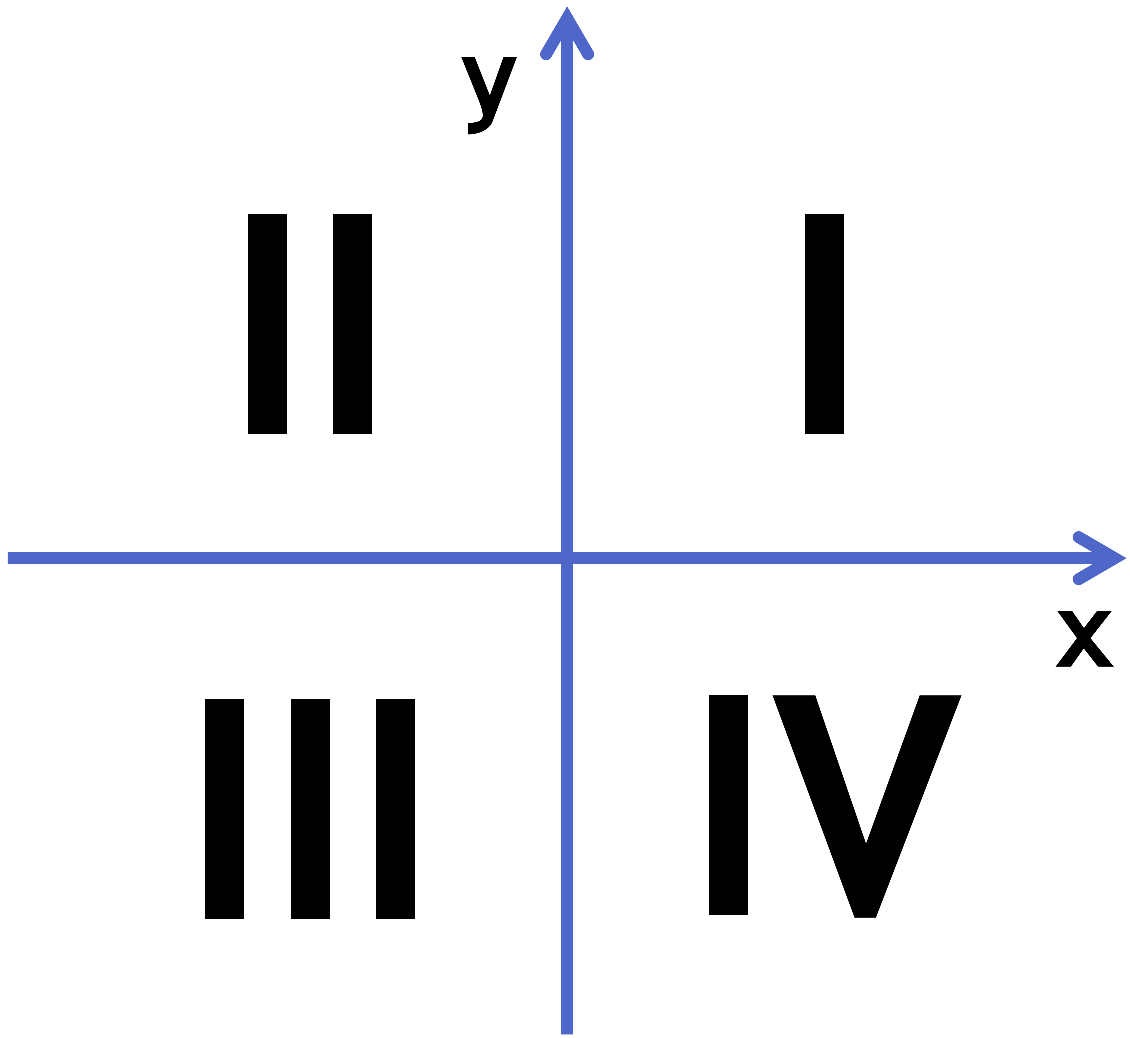
$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

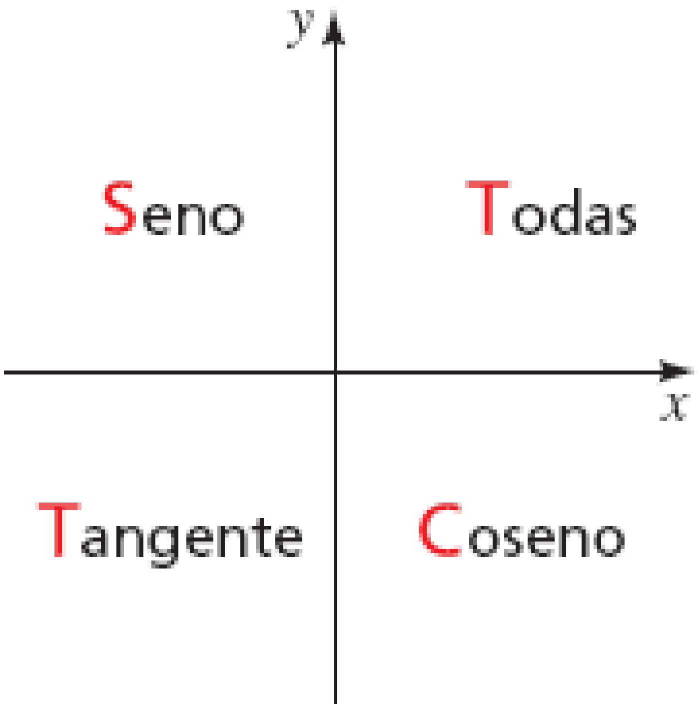
t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Dominios de las funciones trigonométricas

Función	Dominio
sen, cos	Todos los números reales
tan, sec	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot, csc	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n


y
II
I
x
III
IV



Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Propiedades pares e impares

El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Demostración Las identidades recíprocas se infieren inmediatamente de la definición de la página 408. Enseguida demostramos las identidades pitagóricas. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Puesto que $P(x, y)$ están sobre el círculo unitario, tenemos $x^2 + y^2 = 1$. Por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

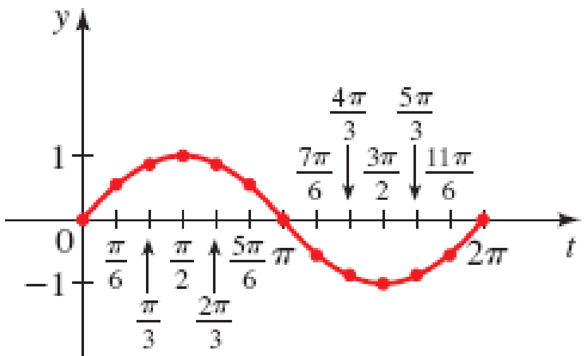
Al dividir ambos miembros entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

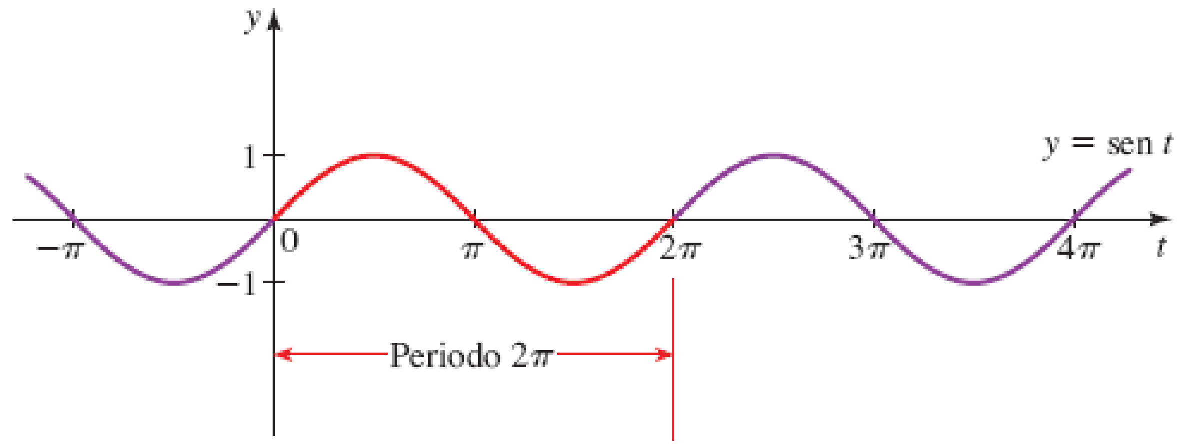
$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

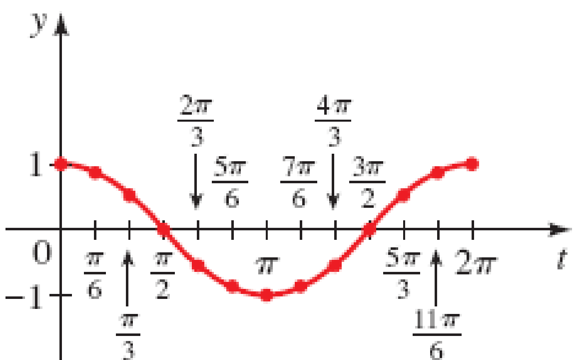
Hemos usado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. De manera similar, al dividir ambos miembros de la primera identidad pitagórica entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) obtenemos $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■



Un periodo de $y = \operatorname{sen} t$

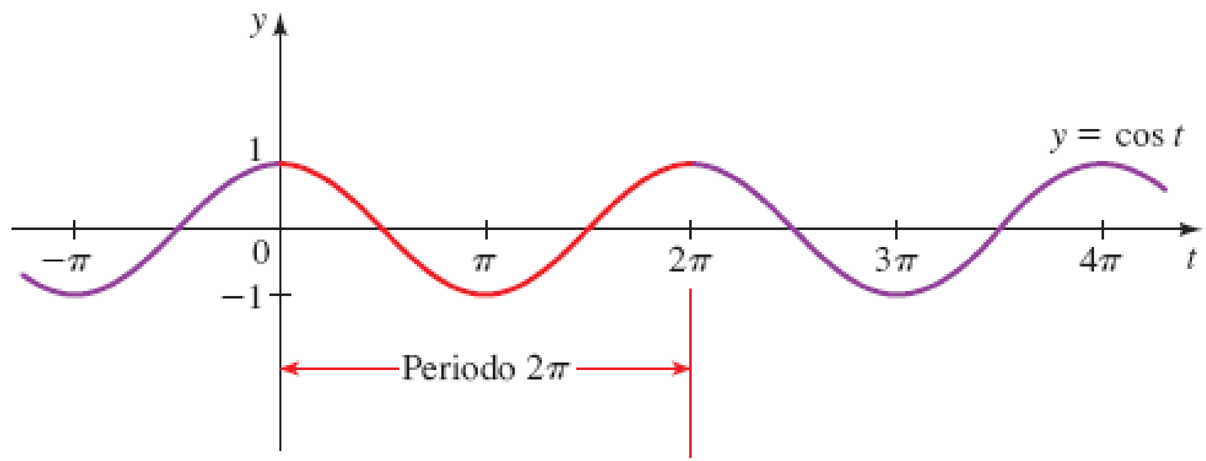
$0 \le t \le 2\pi$





Un periodo de $y = \cos t$

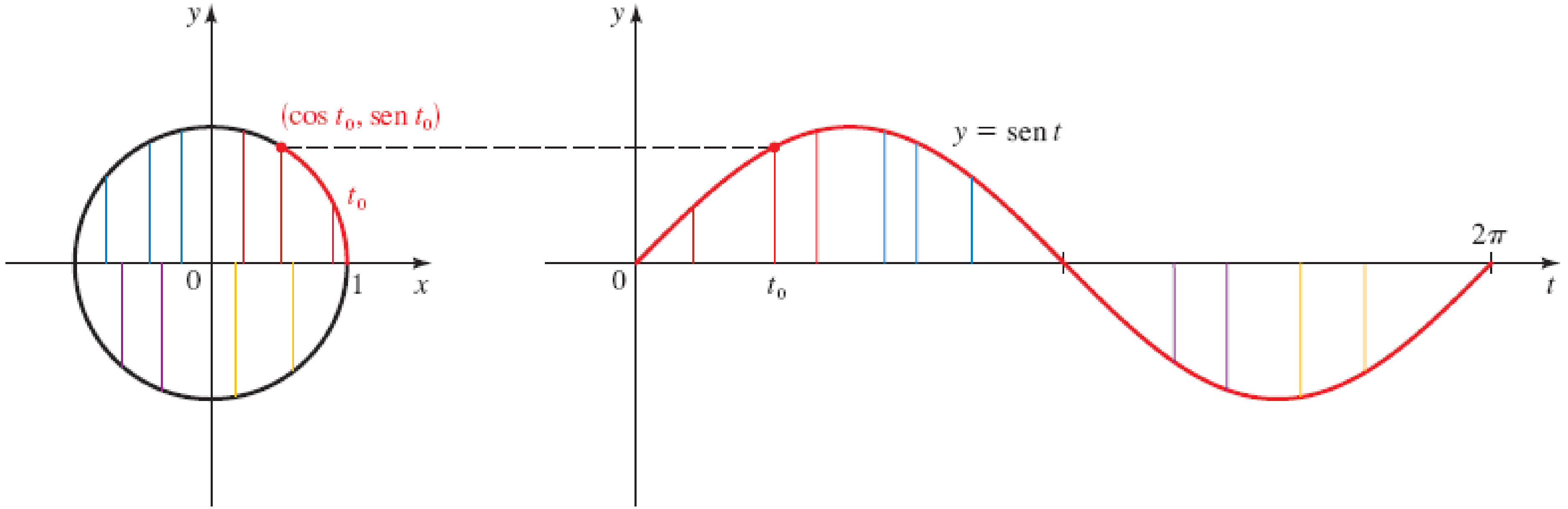
$0 \le t \le 2\pi$



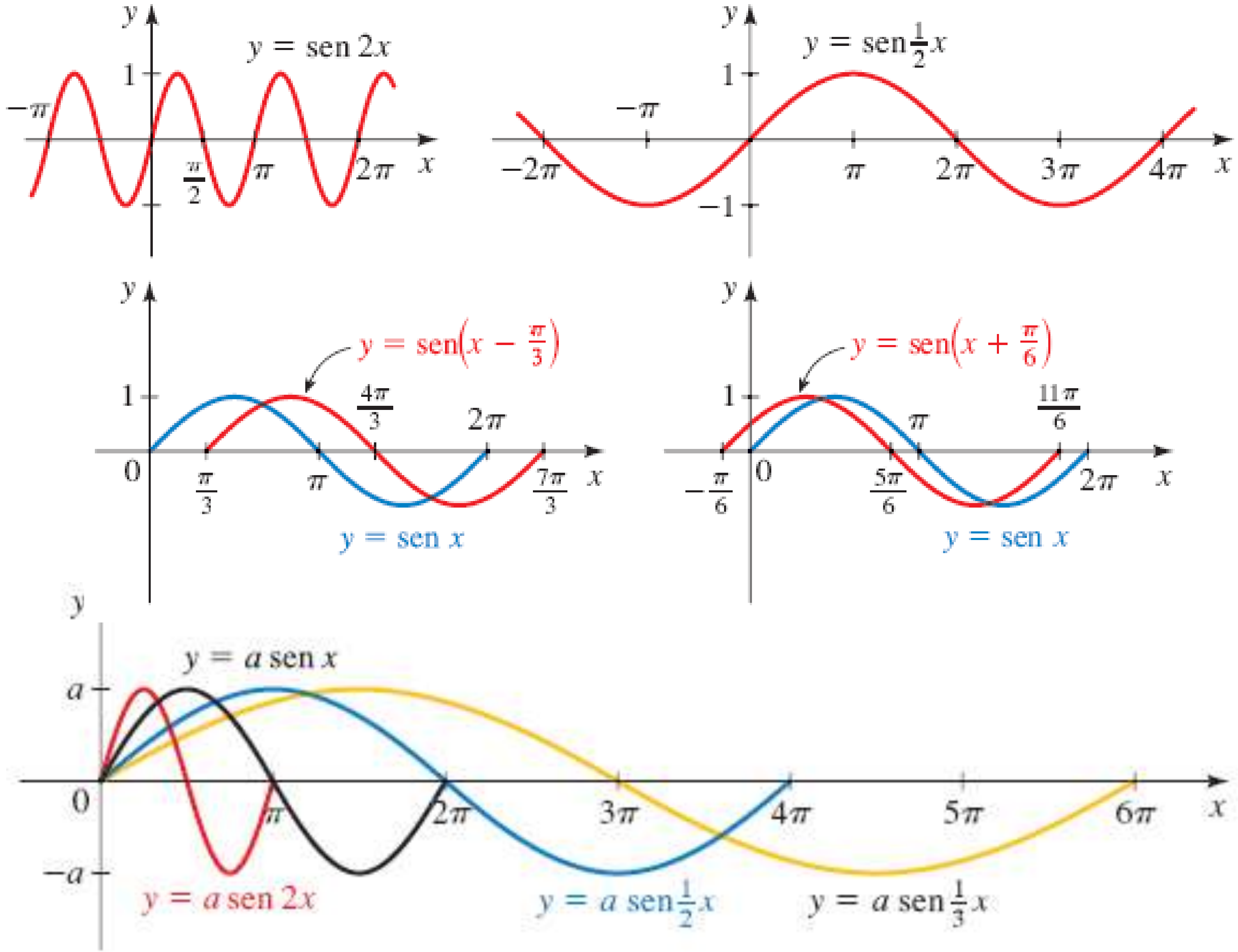
Propiedades periódicas del seno y el coseno

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

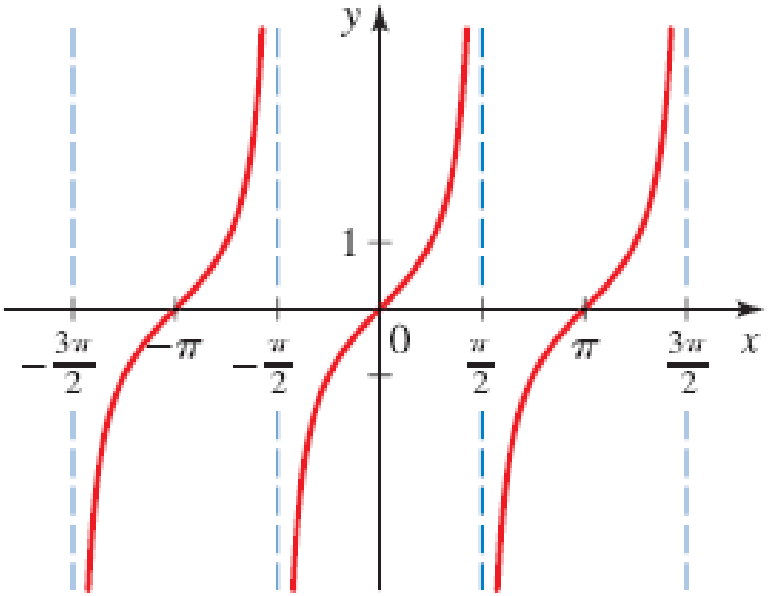
$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$



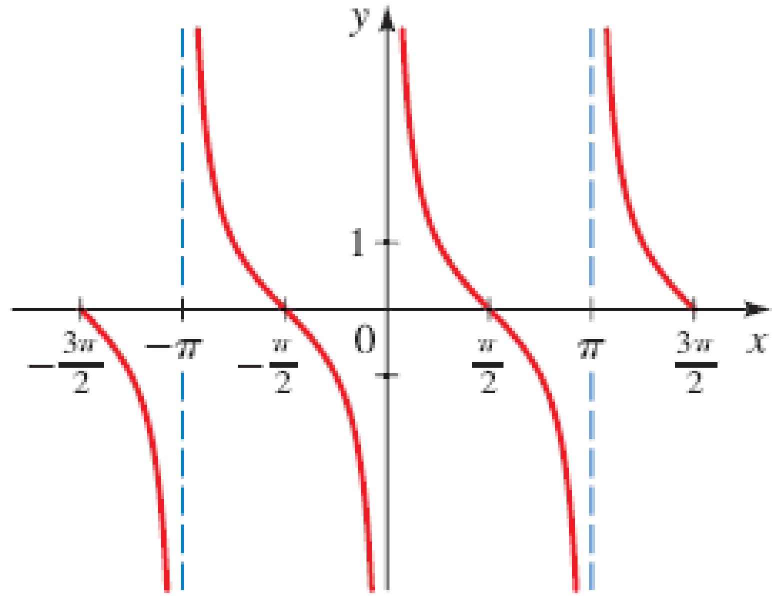
t	sen t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$



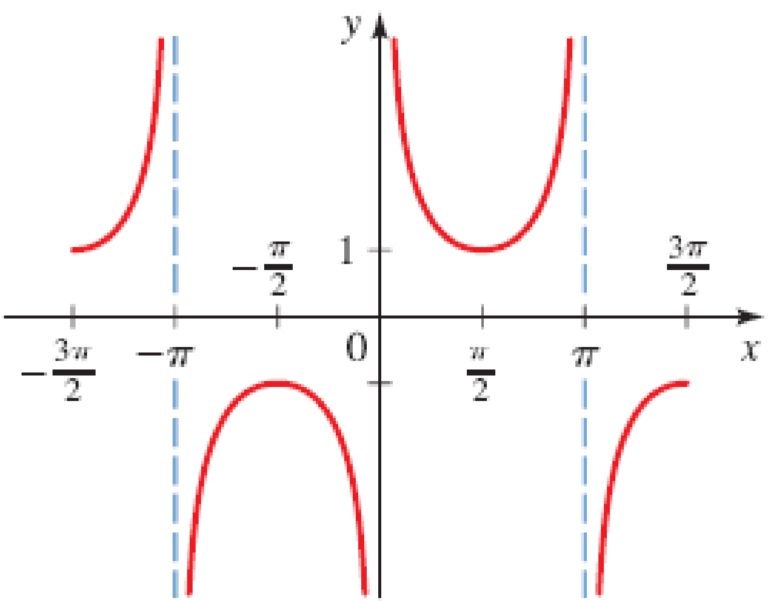
y = sen 2x
y = sen ½x
y = sen(x − π/3)
y = sen(x + π/6)
y = sen x
y = sen x
y = a sen x
y = a sen 2x
y = a sen ½x
y = a sen ⅓x



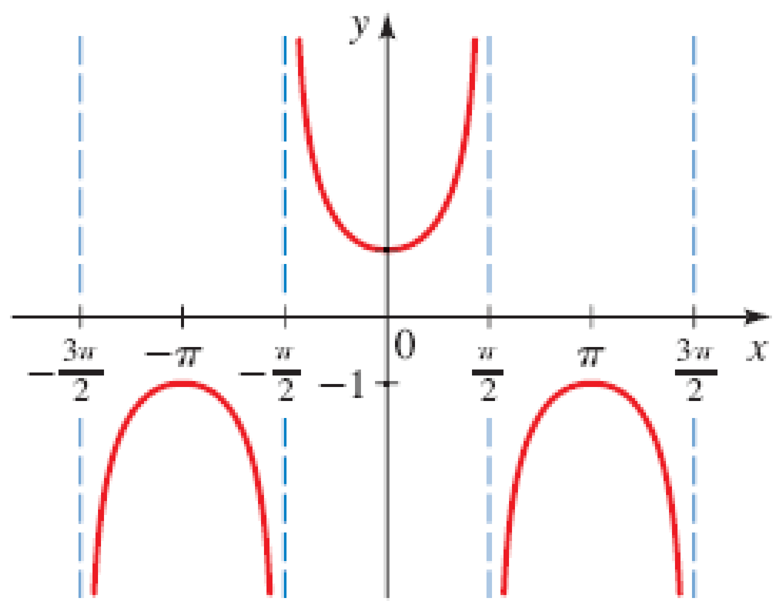
a) $y = \tan x$



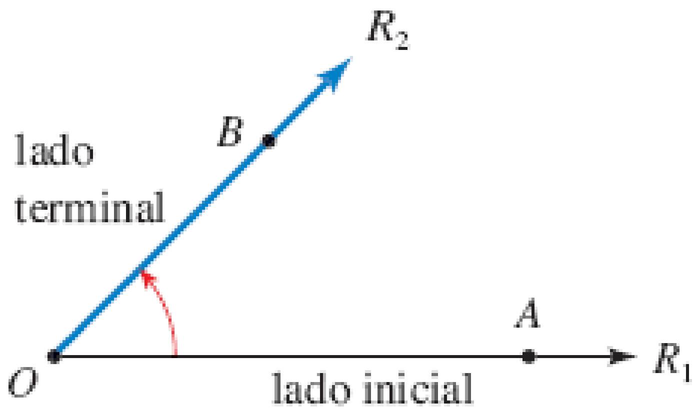
b) $y = \cot x$



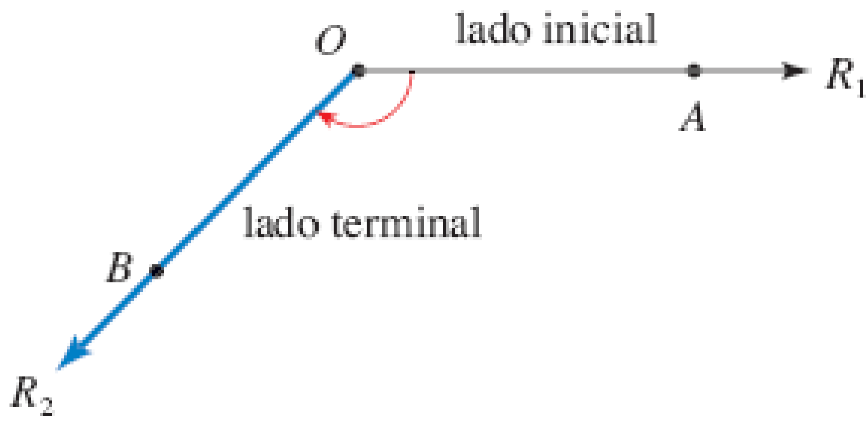
c) $y = \csc x$



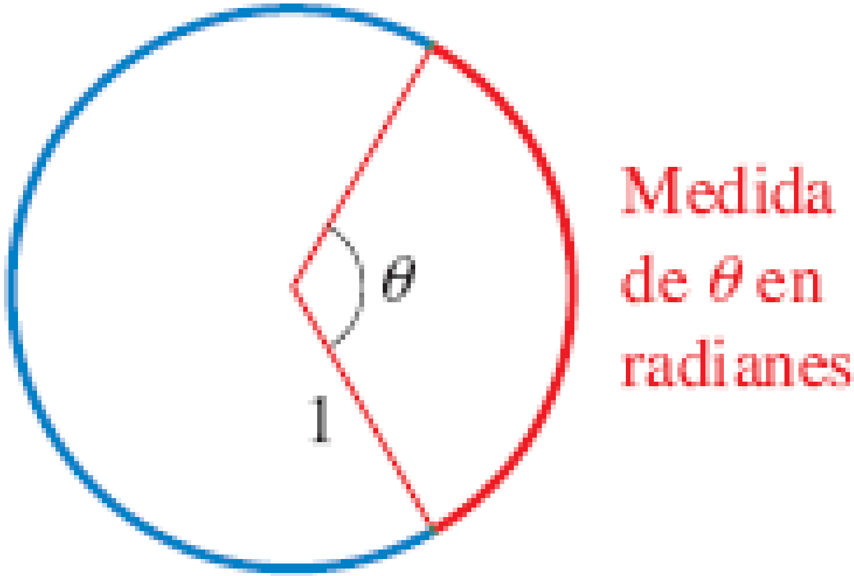
d) $y = \sec x$



ángulo positivo

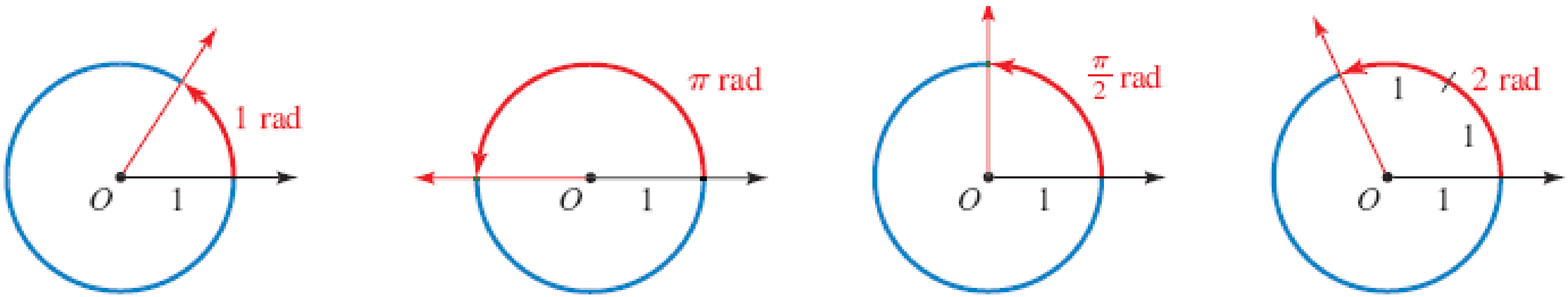


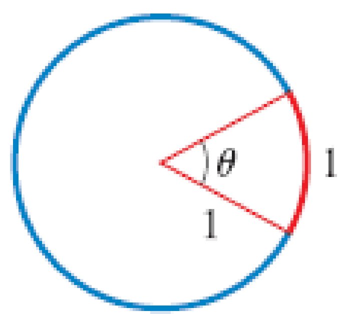
ángulo negativo



Definición de medida en radianes

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (véase la figura 2).





Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

Relación entre grados y radianes

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.


That's all Folks!