UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

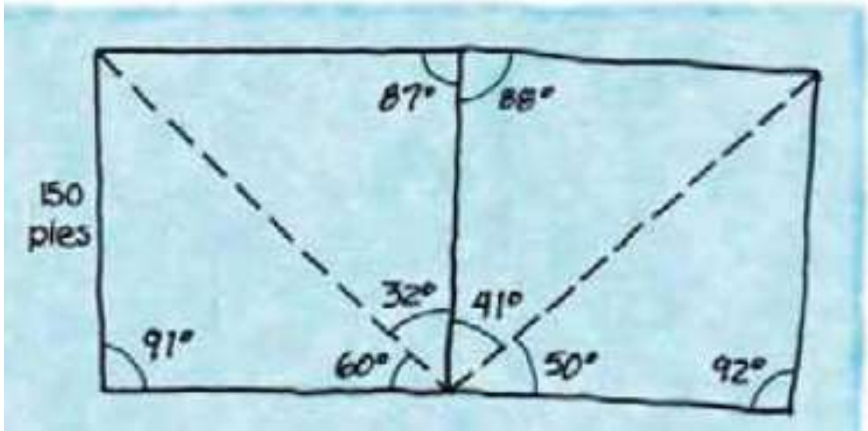
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Naturaleza - Ciencia - Humanismo

Introducción a la matemática

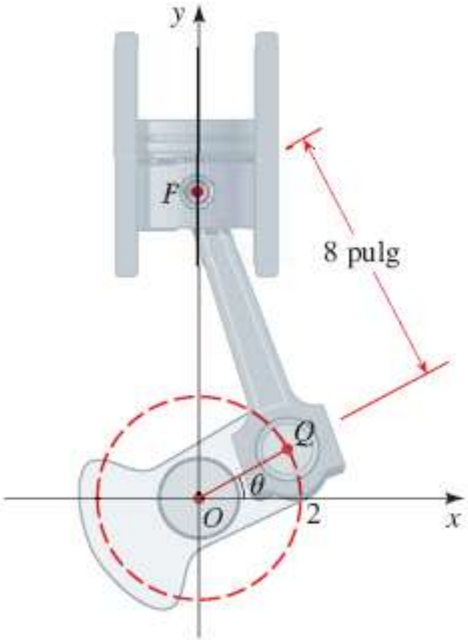
Unidad 5 b

2015

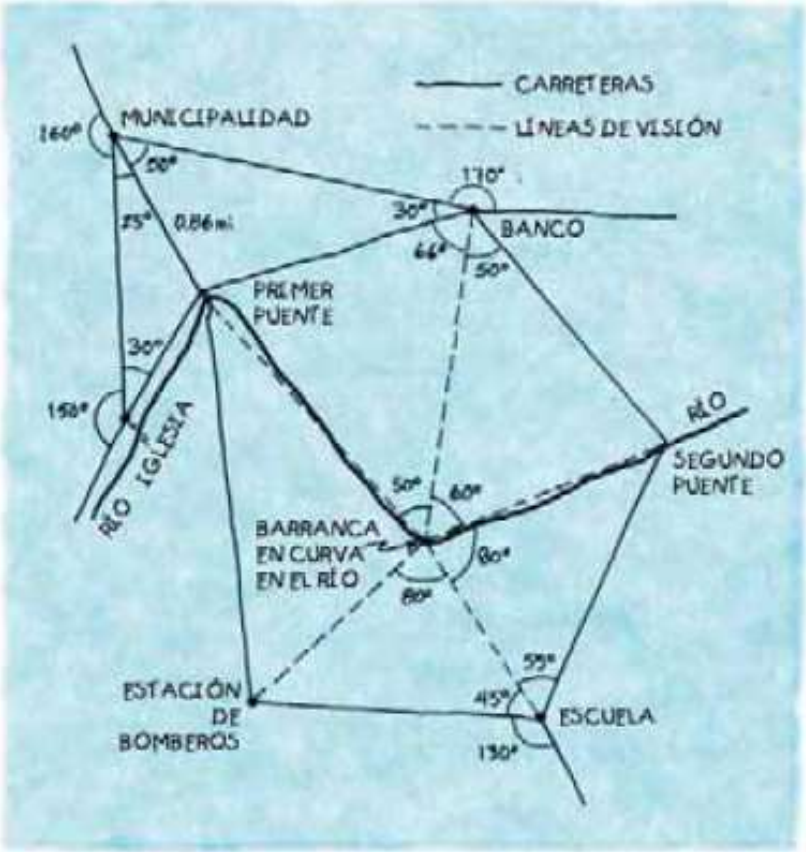
Trigonometría



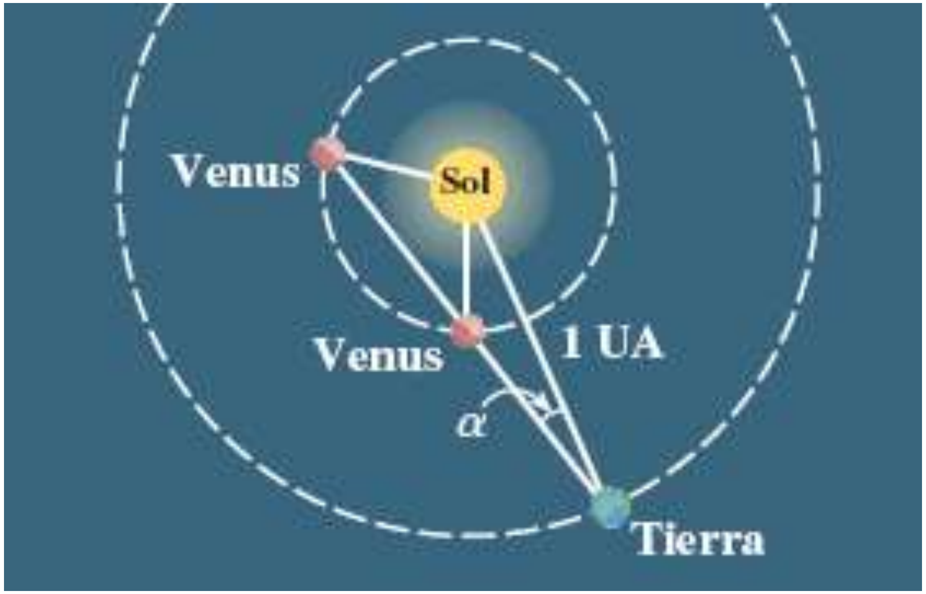
87°
88°
150
pies
32°
41°
91°
60°
50°
92°



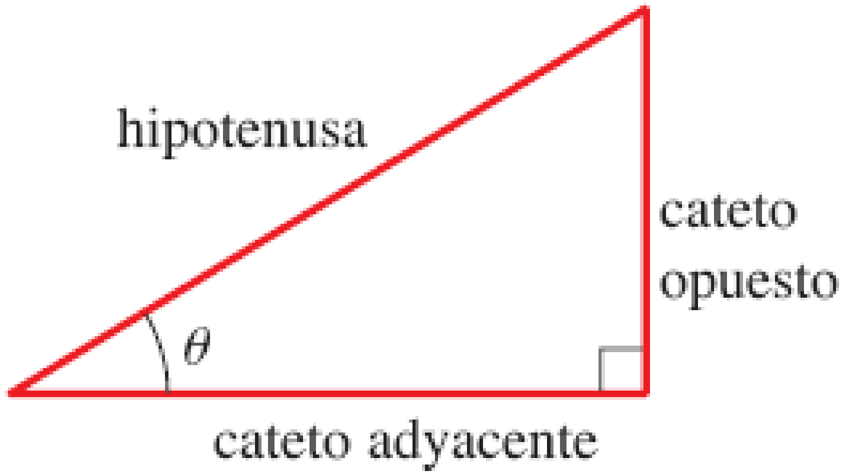
y
F
8 pulg
Q
θ
O
2
x



CARRETERAS
LINEAS DE VISIÓN
MUNICIPALIDAD
160°
50°
170°
30°
BANCO
25°
0.86 mi
66°
50°
PREMER
PUENTE
30°
150°
IGLESIA
RÍO
RÍO
SEGUNDO
PUENTE
50°
60°
BARRANCA
EN CURVA
EN EL RÍO
80°
80°
55°
45°
ESTACIÓN
DE
BOMBEROS
ESCUELA
130°



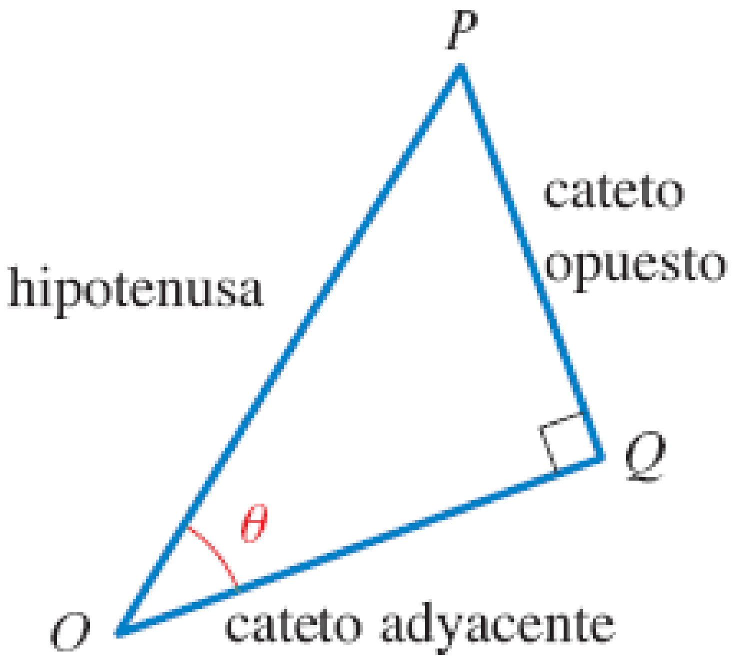
Venus
Sol
Venus
1 UA
α
Tierra

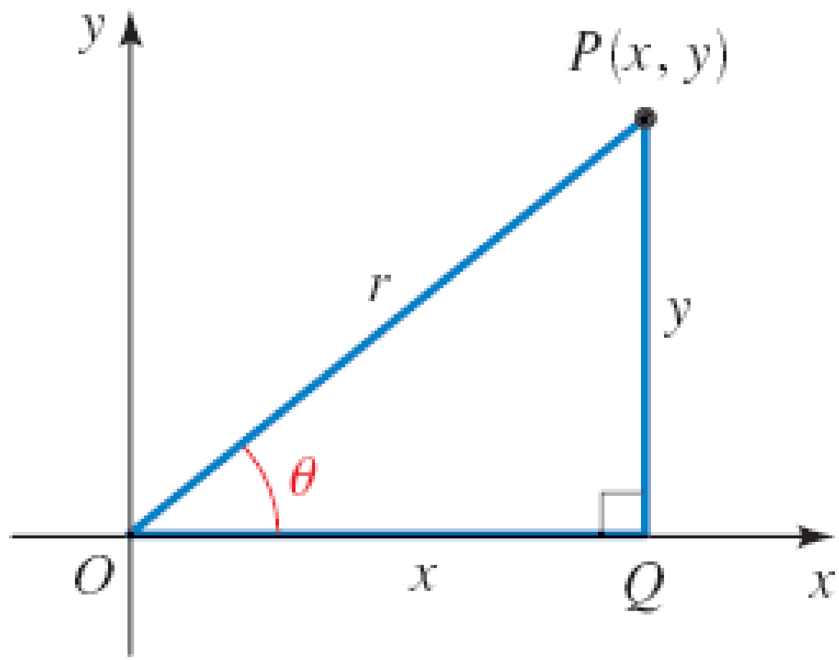


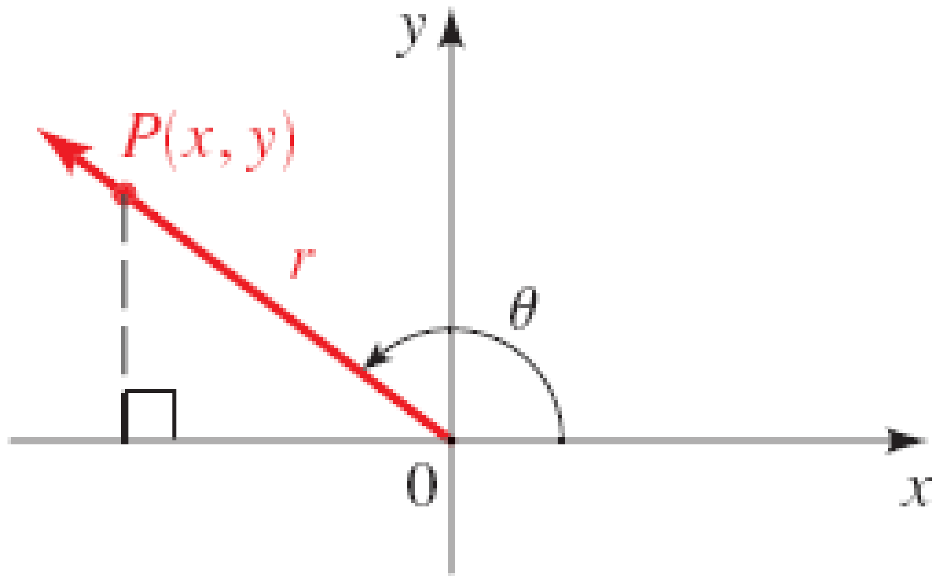
Relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$


P
cateto
opuesto
hipotenusa
Q
θ
O
cateto adyacente


y
P(x, y)
r
y
θ
O
x
Q
x

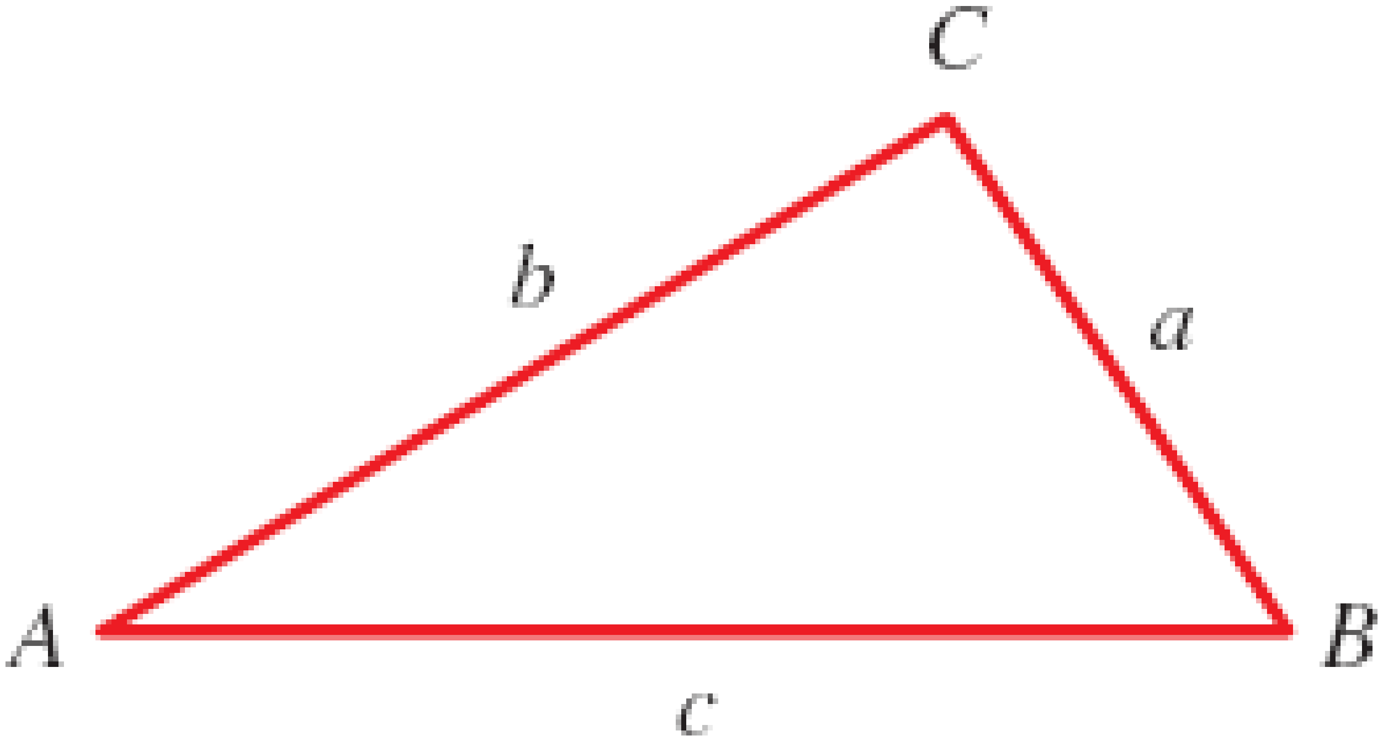


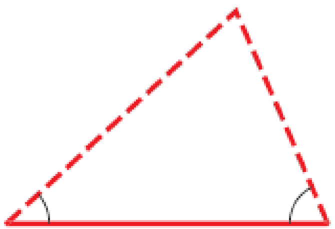
Definición de funciones trigonométricas

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto sobre el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

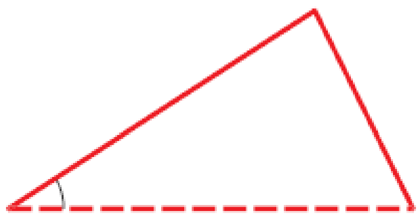
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

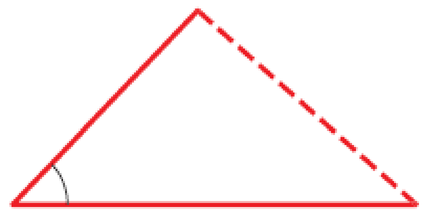

C
b
a
A
B
c



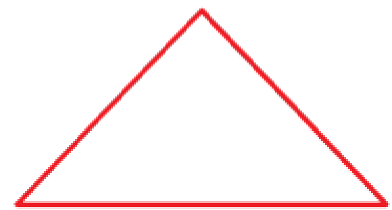
a) LAA



b) LLA



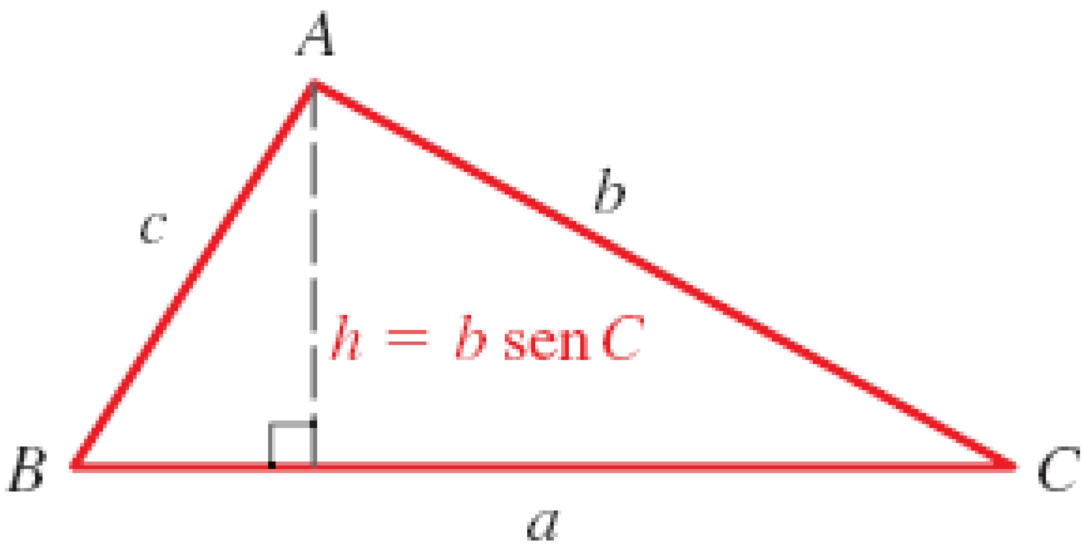
c) LAL



d) LLL

Ley de los senos

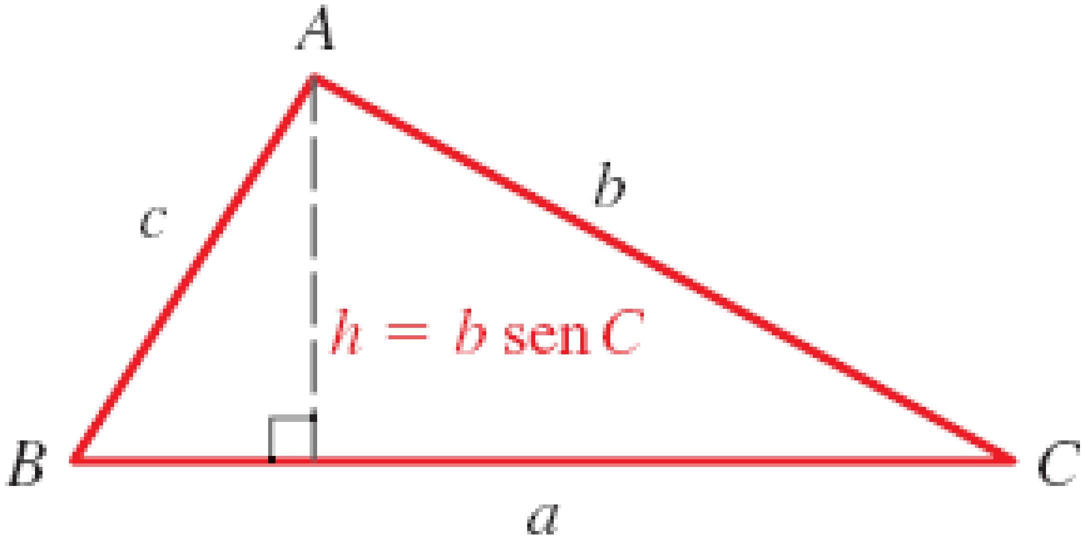
Ley de los cosenos



Ley de los senos

En el triángulo ABC se tiene

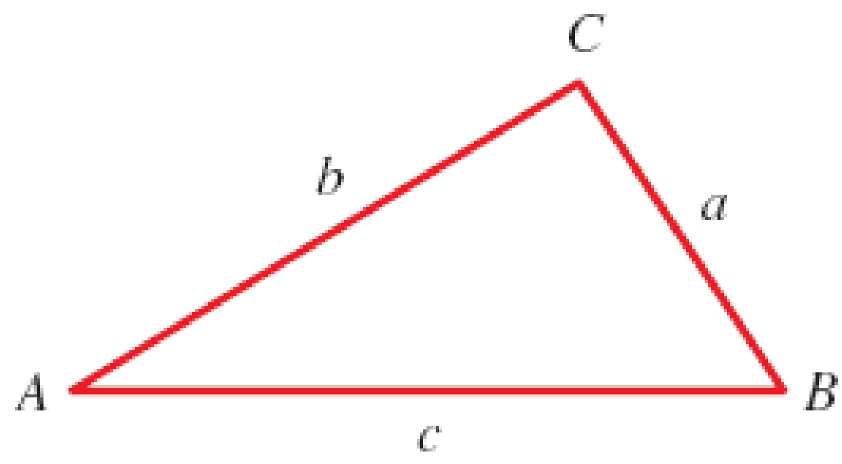
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



Demostración Para ver por qué es cierta la ley de los senos, refiérase a la figura 3. Por la fórmula de la sección 6.3 el área de un triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. Por la misma fórmula el área de este triángulo es también $\frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$ y $\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$. Así,

$$\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

Al multiplicar por $2/(abc)$ se obtiene la ley de los senos.



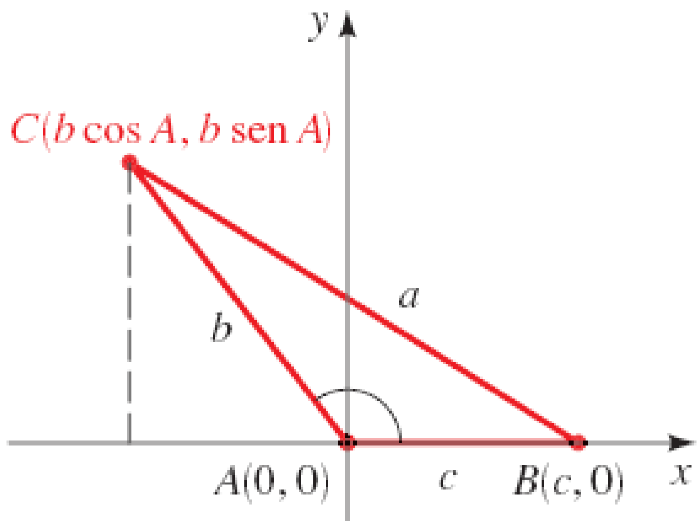
Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC (véase la figura 1), se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



■ **Demostración** Para probar la ley de los cosenos, coloque el triángulo ABC de modo que $\angle A$ está en el origen, como se muestra en la figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b \cos A, b \operatorname{sen} A)$, respectivamente. (Se debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si se dibuja el ángulo A como un ángulo agudo.) Con la fórmula de la distancia, se obtiene

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2 \\
&= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A \\
&= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1
\end{aligned}
$$

Esto demuestra la primera fórmula. Las otras dos formas se obtienen de la misma manera colocando cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y repitiendo el argumento anterior. ■

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned}
\cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\
&= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \sec t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

Demostración de identidades trigonométricas

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación *no* es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable (o variables). Por consiguiente, la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.

2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.

3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

¡Atención! Para demostrar una identidad no ejecutamos las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación. Por ejemplo, si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

1) $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación

2) $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

la cual es evidentemente una identidad. ¿Esto significa que la ecuación original es una identidad? Claro que no. El problema en este caso es que la operación de elevar al cuadrado es **irreversible** en el sentido de que no podemos regresar a 1) a partir de 2) al calcular las raíces cuadradas, es decir, al invertir el procedimiento. Sólo operaciones que son reversibles transformarán necesariamente una identidad en una identidad.

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas para el seno:

$$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$

$$\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para el coseno:

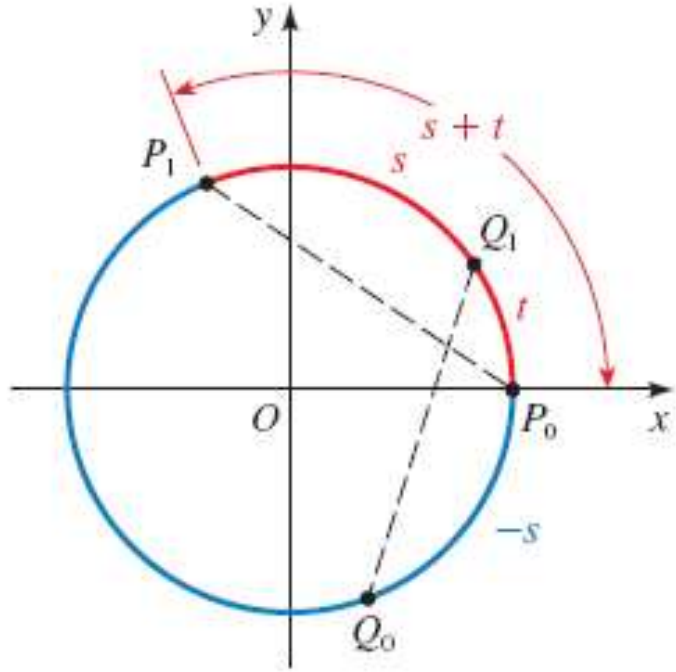
$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Fórmulas para la tangente:

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$



Demostración de la fórmula de la adición en el caso del coseno

Para demostrar la fórmula $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ recurrimos a la figura 1. En la figura, las distancias t, $s + t$ y $-s$ están señaladas en el círculo unitario empezando en $P_0(1, 0)$ y finalizando en Q_1, P_1 y Q_0, respectivamente. Las coordenadas de estos puntos son

$$P_0(1, 0) \qquad\qquad Q_0(\cos(-s), \operatorname{sen}(-s))$$

$$P_1(\cos(s + t), \operatorname{sen}(s + t)) \qquad\qquad Q_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Puesto que $\cos(-s) = \cos s$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen} s$, se infiere que el punto Q_0 tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Obsérvese que las distancias entre P_0 y P_1 y entre Q_0 y Q_1 medidas a lo largo del arco del círculo son iguales. Como los arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, se infiere que $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Aplicando la fórmula de la distancia obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s + t) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(s + t) - 0]^2} = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y desarrollamos los cuadrados tenemos

esto se añade a 1

$$\cos^2(s + t) - 2\cos(s + t) + 1 + \operatorname{sen}^2(s + t)$$
$$= \cos^2 t - 2\cos s \cos t + \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 s$$

esto se añade a 1

esto se añade a 1

Al aplicar la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tres veces obtenemos

$$2 - 2\cos(s + t) = 2 - 2\cos s \cos t + 2\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Para terminar, restamos 2 de cada miembro y dividimos entre -2 ambos miembros:

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

lo cual demuestra la fórmula de la adición para el caso del coseno. ■

■ **Demostración de la fórmula de la adición en el caso del coseno** Si reemplazamos t con $-t$ en la fórmula de la adición para el coseno tenemos

$$\begin{aligned} \cos(s - t) &= \cos(s + (-t)) \\ &= \cos s \cos(-t) - \operatorname{sen} s \operatorname{sen}(-t) && \text{Fórmula de la adición para el coseno} \\ &= \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t && \text{Identidades pares-impares} \end{aligned}$$

Esto demuestra la fórmula de la sustracción en el caso del coseno. ■

Fórmulas para el ángulo doble

Fórmula para el seno: $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Fórmulas para el coseno:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Fórmula para la tangente: $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Demostración de las fórmulas del ángulo doble para el caso del coseno

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x + x)\\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Las fórmulas segunda y tercera para $\cos 2x$ se obtienen de la fórmula que apenas demostramos y de la identidad pitagórica. Al sustituir $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

La tercera fórmula se obtiene de la misma manera, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. ■

Fórmulas para reducir las potencias

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

■ **Demostración** La primera fórmula se obtiene determinando $\operatorname{sen}^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. De igual manera, la segunda fórmula se obtiene calculando $\cos^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula se deduce de las primeras dos y de las identidades recíprocas:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$ ■

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La elección del signo $+$ o $-$ depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Demostración Sustituimos $x = u/2$ en las fórmulas para reducir la potencia y calculamos la raíz cuadrada de cada miembro. Esto genera las dos primeras fórmulas mitad de ángulo. En el caso de la fórmula mitad de ángulo para la tangente, tenemos

$$\tan\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}\right)\left(\frac{1 - \cos u}{1 - \cos u}\right)}$$

Multiplicación del numerador y del denominador por $1 - \cos u$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos u)^2}{1 - \cos^2 u}}$$

Simplificación

$$= \pm\frac{|1 - \cos u|}{|\operatorname{sen} u|}$$

$\sqrt{A^2} = |A|$ y $1 - \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u$

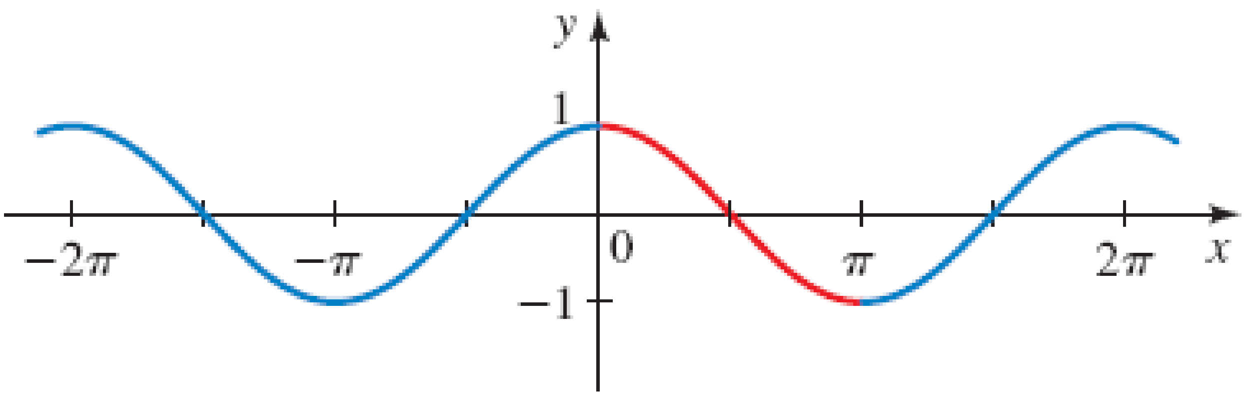
Entonces, $1 - \cos u$ es no negativo para todos los valores de u. Asimismo, es cierto que $\operatorname{sen} u$ y $\tan(u/2)$ siempre tienen el mismo signo. Verifíquelo. Entonces, se infiere que

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u}$$

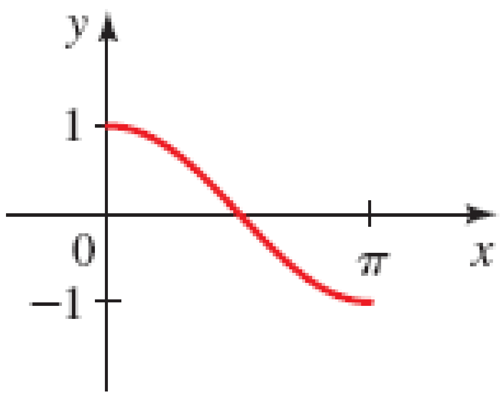
La otra fórmula semiángulo para la tangente se deriva de ésta al multiplicar tanto el numerador como el denominador por $1 + \cos u$. ■

La función inversa del coseno

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno, por lo que tiene una inversa. Elegimos este intervalo porque en él el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez



$y = \cos x$



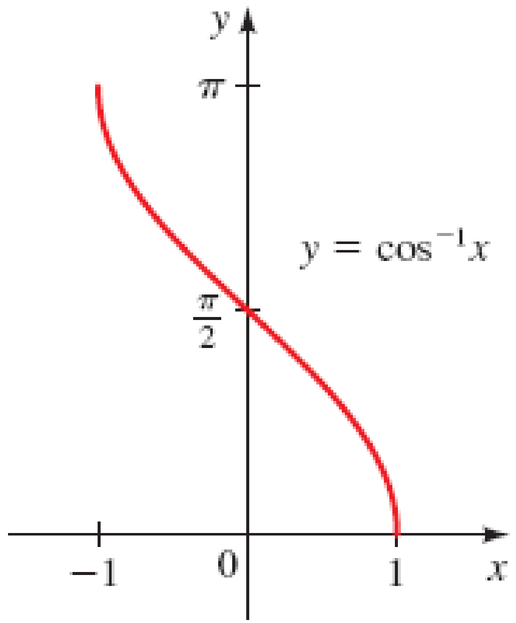
$y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$

Definición de la función inversa del coseno

La **función inversa del coseno** es la función $\mathbf{cos^{-1}}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ definido por

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

La función inversa del coseno también se denomina **arco coseno** y se escribe **arccos**.



Por consiguiente, $y = \cos^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[0, \pi]$ *cuyo coseno es* x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades de las funciones inversas.

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$
$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ se ilustra en la figura 6; se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, en la recta $y = x$.

Definición de la función inversa de la tangente

La **función inversa de la tangente** es la función $\tan^{-1}$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$ definida por

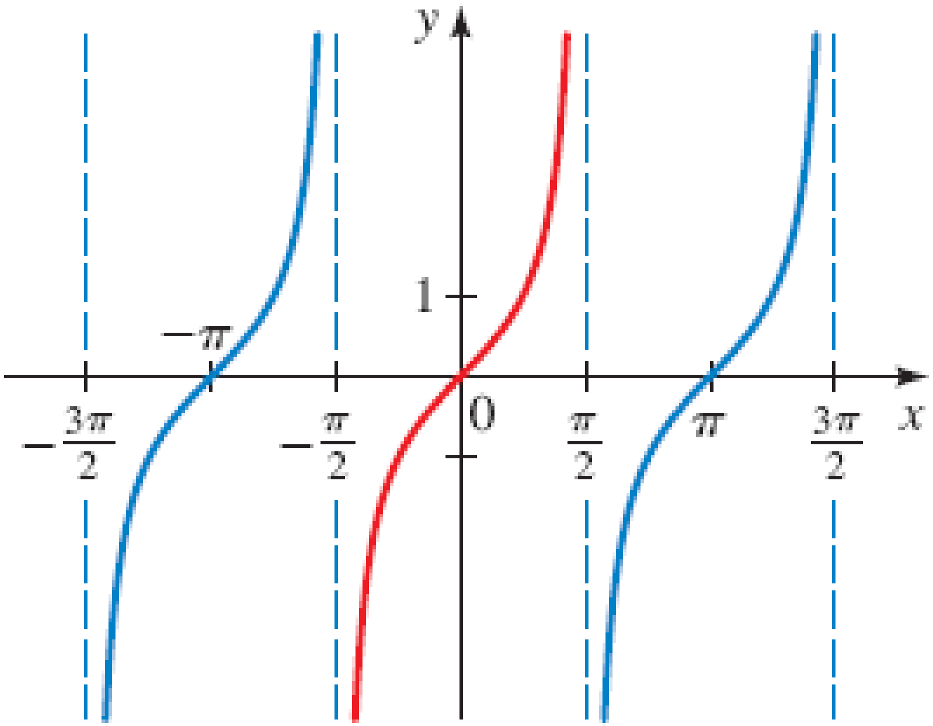
$$\tan^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

La función inversa de la tangente también recibe el nombre de **arco tangente** y se escribe **arctan**.

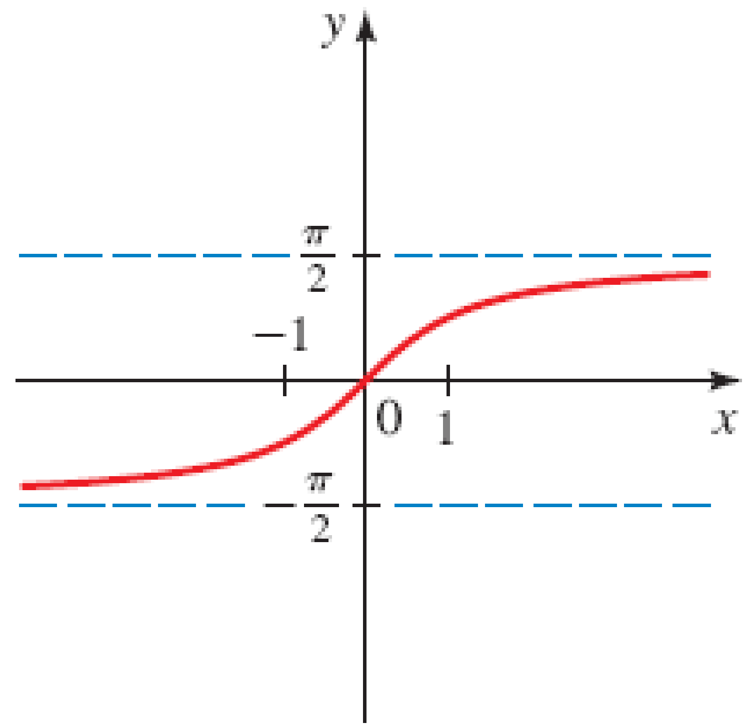
Por lo tanto, $\tan^{-1}x$ *es el número en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *cuya tangente es* x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades inversas de las funciones.

$$\tan(\tan^{-1}x) = x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

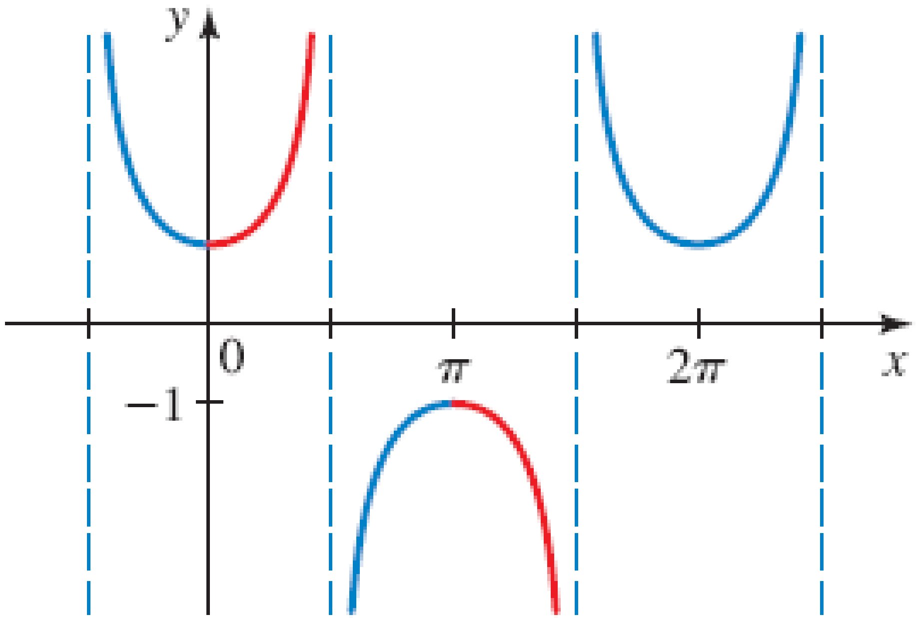


$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

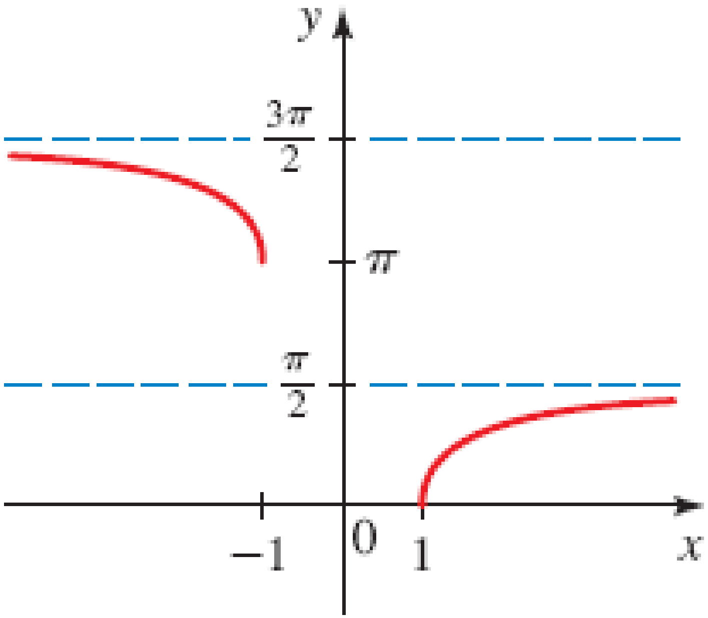


$y = \tan^{-1} x$

La función secante inversa

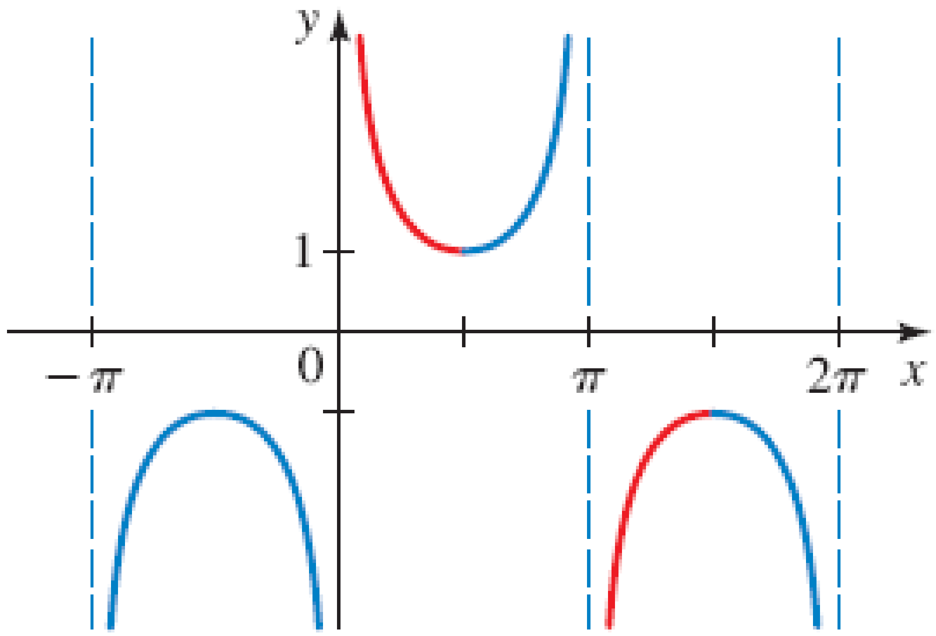


$y = \sec x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$

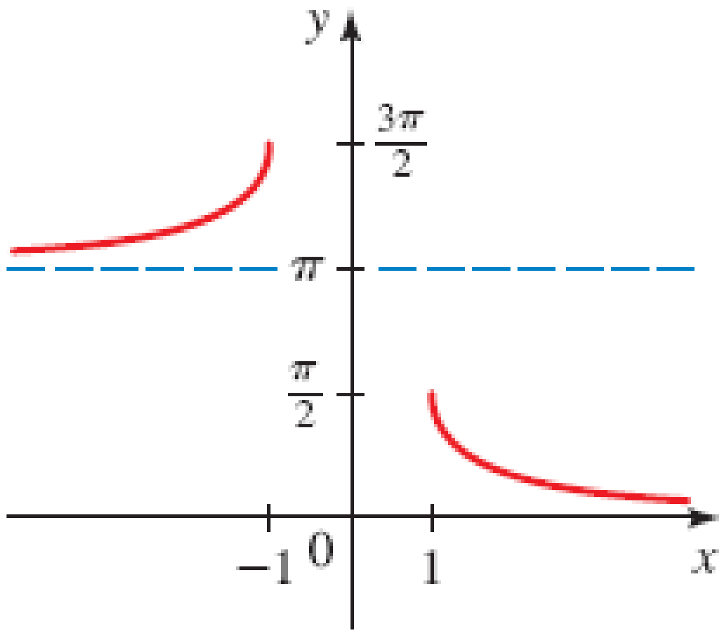


$y = \sec^{-1} x$

La función cosecante inversa

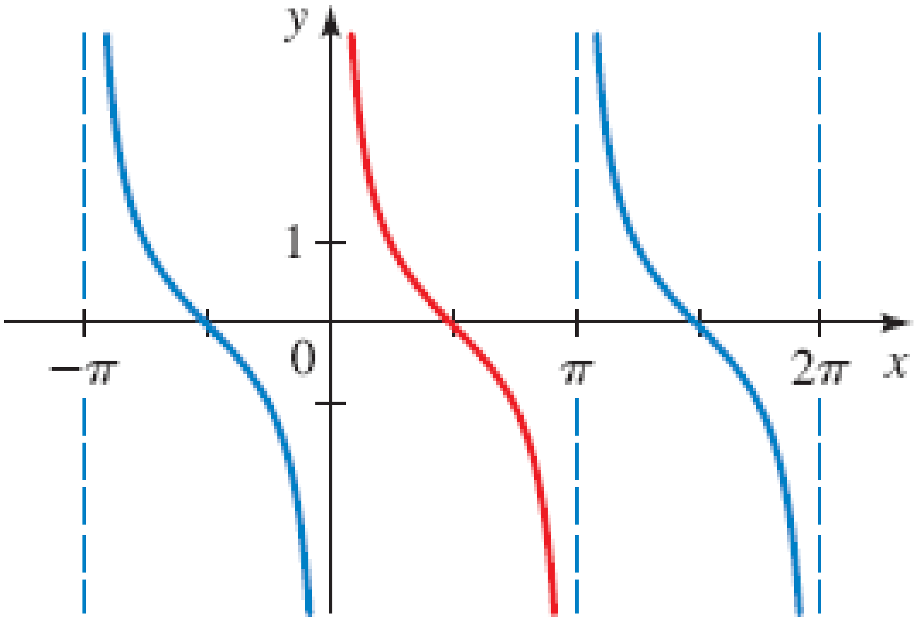


$y = \csc x,\ 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \pi < x \le \frac{3\pi}{2}$

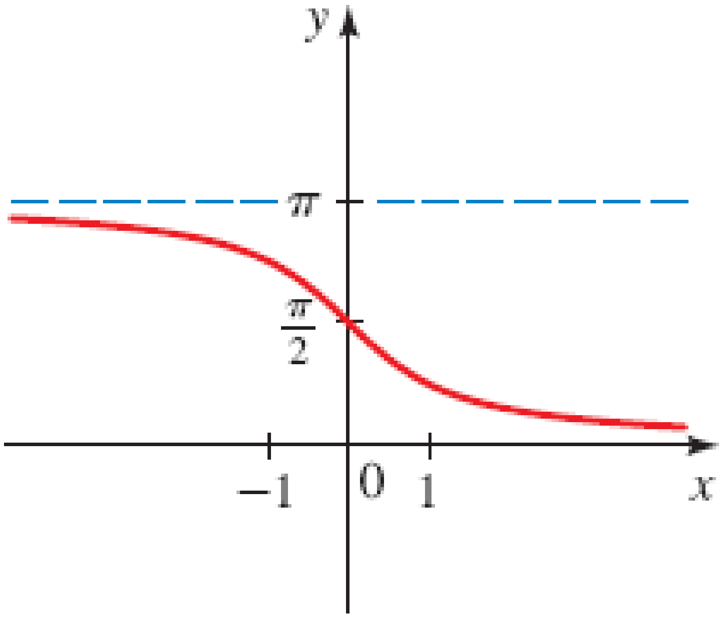


$y = \csc^{-1} x$

La función cotangente inversa



$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$



$y = \cot^{-1} x$

Fim