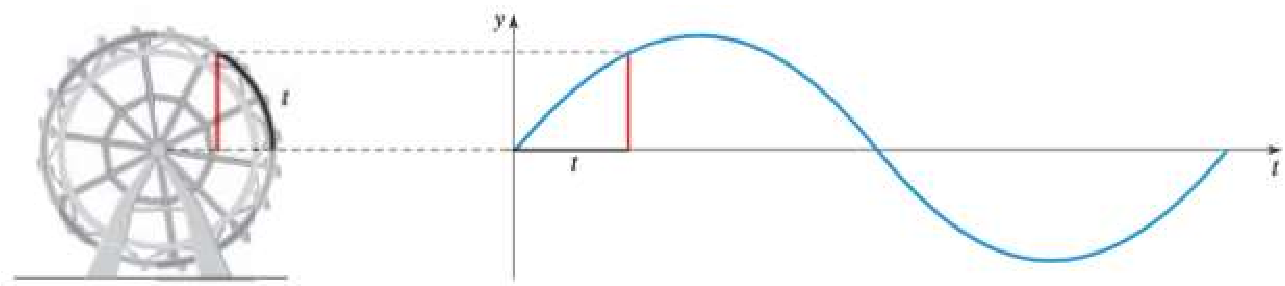
Ingreso 2021
Matemática

UNIDAD N°6
TRIGONOMETRÍA



El material que compone estas notas ha sido elaborado por la Prof. Estrellita Sobisch y revisado por las Profesoras Gisela Fitt y Celeste Scatragli, para brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, correspondiente al INGRESO de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio, que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal:

- STEWART, J y Otros. (2001). *Precálculo (3ra ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.*

1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una de las ramas más versátiles de las matemáticas.

Tiene aplicaciones tanto teóricas como prácticas.

El poder y la versatilidad provienen del hecho que puede considerarse de dos maneras diferentes. Una de ellas define la trigonometría como el estudio de *funciones de números reales*, la otra como estudio de *funciones de ángulos.*

Las funciones trigonométricas definidas de estas dos formas son idénticas —asignan el mismo valor a un número real dado (en el segundo caso, el número real es la medida de un ángulo). La diferencia es sólo el punto de vista.

En uno de ellos, se presentan aplicaciones que abarcan procesos dinámicos como el movimiento armónico, el estudio de ondas sonoras y la descripción de los fenómenos periódicos.

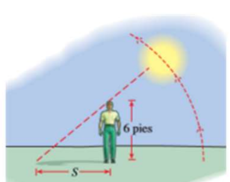
El otro enfoque permite aplicaciones estáticas, como por ejemplo la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Podríamos esquematizar sintéticamente de la siguiente manera.

TRIGONOMETRÍA

Podemos considerarla desde dos visiones distintas

Funciones de Ángulos



Aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones

AMBAS EQUIVALENTES

Difieren en las APLICACIONES

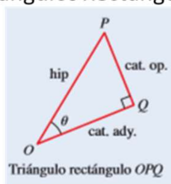
Funciones de Números Reales

Aplicaciones que abarcan procesos dinámicos como el movimiento armónico, el estudio de ondas sonoras y la descripción de los fenómenos periódicos

Funciones de Ángulos	Funciones de Números Reales

Basadas en

Triángulos Rectángulo

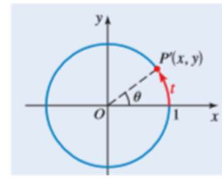


Analizamos las relaciones métricas entre sus lados en sus definiciones:

Relaciones trigonométricas

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\tan\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
$\csc\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Circunferencia Unitaria



Utilizamos las coordenadas de un punto en la circunferencia en sus definiciones:

Definición de las funciones trigonométricas

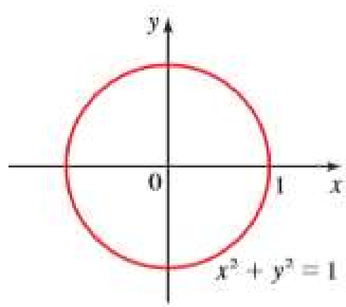
Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

$\operatorname{sen} t = y$	$\cos t = x$	$\tan t = \dfrac{y}{x}\quad (x \neq 0)$
$\csc t = \dfrac{1}{y}\quad (y \neq 0)$	$\sec t = \dfrac{1}{x}\quad (x \neq 0)$	$\cot t = \dfrac{x}{y}\quad (y \neq 0)$

	Funciones de Ángulos	Funciones de Números Reales
Unidad de medida	Grado Sexagesimal	Radián
Equivalencia	$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\, rad$	$1\, rad = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

2. LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

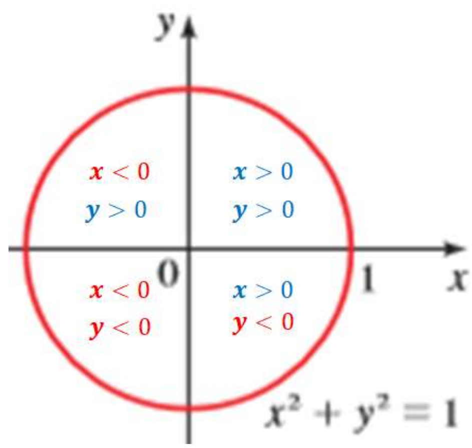
El conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a una distancia 1 (unidad de longitud) del origen, es una circunferencia cuyo radio mide 1 (unidad de longitud). Representada por $C_{(O,1)}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

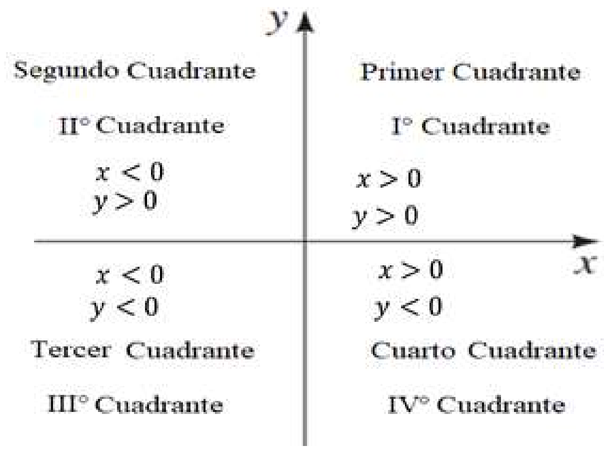


<u>Definición de Circunferencia Unitaria</u>

La Circunferencia Unitaria con centro en el origen de coordenadas O y radio $r = 1$, $C_{(O,1)}$, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del origen O una distancia de 1 unidad. Su ecuación es $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1$, más conocida como $x^2 + y^2 = 1$.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro cuadrantes, nombrados en el sentido antihorario, como indica la figura. Los puntos ubicados en cada cuadrante tienen coordenadas con signos positivos o negativos como está indicado.





El signo de las coordenadas de un punto $P(x, y)$ según el cuadrante son:

CUADRANTE	X	Y
PRIMER CUADRANTE	$+$	$+$
SEGUNDO CUADRANTE	$-$	$+$
TERCER CUADRANTE	$-$	$-$
CUARTO CUADRANTE	$+$	$-$

¿Cómo sabemos si un punto P está en la Circunferencia Unitaria C$_{(O,1)}$?

Ejemplo 1: Determinar si un punto pertenece a la Circunferencia Unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ está en la Circunferencia Unitaria.

Solución

Necesitamos demostrar que este punto cumple con la ecuación de la circunferencia, es decir, $x^2 + y^2 = 1$.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Podemos afirmar que P está en la Circunferencia Unitaria. ♦

Si un punto $P(x, y)$ del plano verifica $x^2 + y^2 < 1$ se dice que es un punto interior de $C_{(O,1)}$.

Si un punto $P(x, y)$ del plano verifica $x^2 + y^2 > 1$ se dice que es un punto exterior de $C_{(O,1)}$.

<u>Observación</u>: *Tanto la coordenada x como la coordenada y deben ser menores o iguales a 1 para que el punto P esté sobre la circunferencia unitaria.*

Si conocemos el cuadrante y una de las coordenadas de P, podemos fácilmente encontrar la coordenada faltante.

Ejemplo 2: Buscar las coordenadas de un punto en la Circunferencia Unitaria

El punto $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ está en la Circunferencia Unitaria en el cuadrante IV. Encuentre su coordenada y.

Solución

Como está en la Circunferencia Unitaria, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como el punto está en el IV cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, así que $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ◆

Trabajo Práctico

Ejercicio N°1:

Determine cuáles de los siguientes puntos están en el círculo unitario, cuáles pertenecen a la circunferencia unitaria y cuáles se hallan fuera del círculo unitario.

a. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$
b. $\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$
c. $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$
d. $\left(\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}\right)$
e. $\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$

Ejercicio N°2:

Determine la coordenada faltante de *P*, si se sabe que *P* es un punto de la circunferencia unitaria ubicado en el cuadrante indicado.

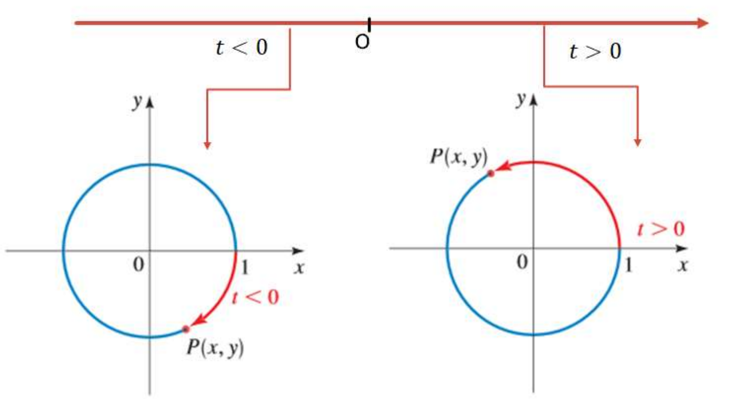
Coordenadas	Cuadrante
$\left(x_1\,,\frac{1}{3}\right)$	II
$\left(\frac{2}{5}\,,y_2\right)$	I
$\left(-\frac{3}{7}\,,y_3\right)$	III
$\left(x_4\,,-\frac{5}{8}\right)$	IV
$\left(x_5\,,\frac{2}{9}\right)$	II

Puntos sobre la Circunferencia Unitaria

Suponga que t es un número real.

La pregunta es: ¿Cómo hacemos para localizar este número real en la circunferencia unitaria?

Respuesta: Empezando en el punto $(1\,,0)$ y desplazándonos en el sentido contrario a las agujas del reloj si t es positivo, o bien, en el sentido de las manecillas del reloj si t es negativo, tantas unidades de medidas como indica t. De esta forma llegamos al punto $P(x,y)$ sobre la circunferencia determinado por el número real t. A este punto lo llamamos **punto terminal**.



Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t<0$

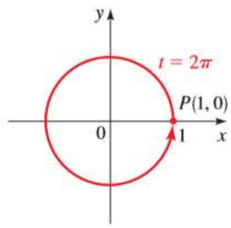
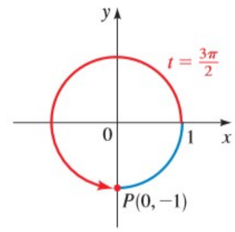
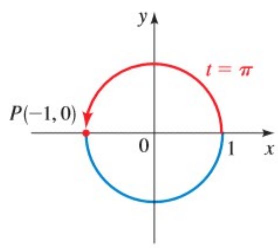
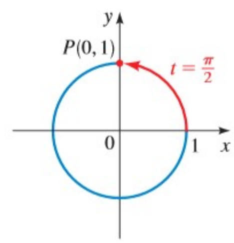
Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t>0$

La longitud de la circunferencia unitaria es $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, tomando como punto de partida a $(1\,,0)$, si t se desplaza en el sentido contrario a las agujas del reloj a lo largo de la circunferencia, retornando al punto de partida, t habrá recorrido una distancia de 2π unidades (de longitud)

Si t se desplaza la mitad del camino alrededor de la circunferencia, habrá recorrido $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ unidades

Para desplazarse un cuarto de la distancia alrededor de la circunferencia, t recorre $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ unidades

La pregunta es: ¿Dónde se encuentra el punto terminal cuando t recorre ciertas distancias a lo largo de la circunferencia?

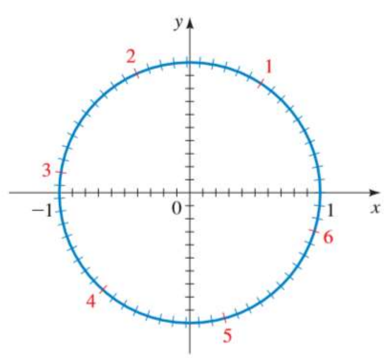
Si t recorre toda la circunferencia $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(1,0)$		Si t recorre tres cuartas partes de la circunferencia $\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3}{2}\pi$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(0, -1)$	
Si t recorre la mitad de la circunferencia $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(-1,0)$		Si t recorre la cuarta parte de la circunferencia $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(0,1)$	

Trabajo Práctico

Ejercicio N°3:

Mediante la figura encuentre el punto sobre la circunferencia determinado por el número real t, con coordenadas con una cifra decimal.

a) $t = 1$ b) $t = 2{,}5$ c) $t = -1{,}1$ d) $t = 4{,}2$



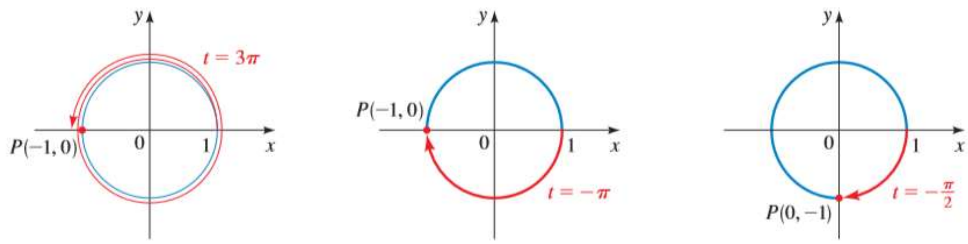
Ejemplo 3: Dado un número real t, encontrar el punto $P(x, y)$ en la Circunferencia Unitaria

Calcule el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria determinado por cada número real t dado.

a) $t = 3\pi$ b) $t = -\pi$ c) $t = -\frac{\pi}{2}$

Solución

De acuerdo con la siguiente figura, observamos que:



a) El punto determinado por $t = 3\pi$ es $(-1\,,0)$
b) El punto determinado por $t = -\pi$ es $(-1\,,0)$
c) El punto determinado por $t = -\frac{\pi}{2}$ es $(0\,,-1)$ ♦

➢ Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto. Esto <u>no ocurre en la recta real.</u>

Puntos especiales sobre la circunferencia y la determinación de sus coordenadas

❖ **Para $\boldsymbol{t = 0}$:**

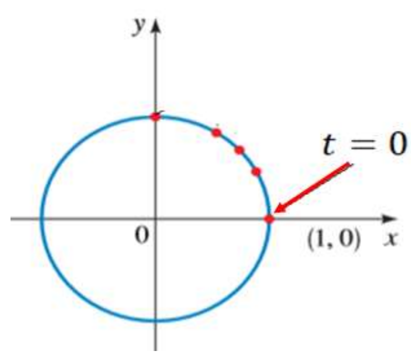


Fig. 1

Entonces, para $t = 0$, $y = 0\,, x = 1$ y P es $(1\,,0)$

❖ **Para $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4}}$:**

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4}}$ está a la misma distancia de $(1\,,0)$ que de $(0\,,1)$ sobre la circunferencia unitaria como muestra la figura 2.

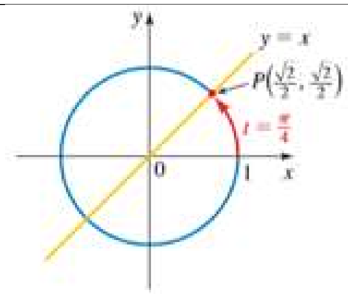


Fig. 2

Dado que la circunferencia centrada en el origen es simétrica respecto a la recta $y = x$, se infiere que P queda sobre esta recta. De este modo, P es el punto del primer cuadrante donde se cortan la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Resolviendo este sistema de ecuaciones no lineales tenemos:

$x^2 + x^2 = 1$ sustituyendo y por x

$2x^2 = 1$ sumando términos semejantes

$x^2 = \frac{1}{2}$ multiplicando por el inverso multiplicativo ambos miembros de la ecuación

$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ obtención de las raíces cuadradas

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ resolviendo la ecuación en valor absoluto

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ racionalizando

Como P está en el primer cuadrante, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y como $y = x$, entonces tenemos también $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto, el punto determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ es $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Veamos cómo obtener las coordenadas de $P(x, y)$ para otros valores de t:

- **Para $t = \frac{\pi}{6}$:**

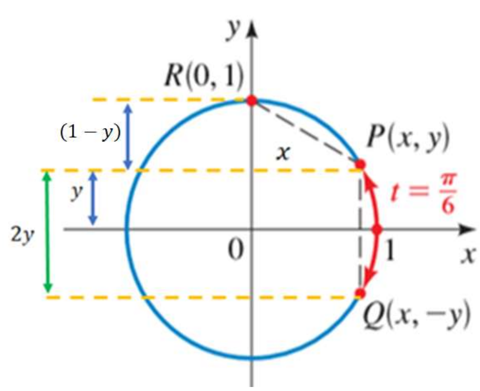


Fig. 3

De la figura 3 podemos observar que

$d(PQ) = d(PR)$ pues es la cuerda correspondiente a arcos de longitud de $2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$d(PQ) = 2y = d(PR)$ observando la figura 1

$2y = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - 2y + y^2)}$ desarrollando el cuadrado

$2y = \sqrt{(x^2 + y^2) + 1 - 2y} = \sqrt{1 + 1 - 2y} = \sqrt{2 - 2y}$ reordenando y $(x, y) \in C(O, 1)$

$4y^2 = 2 - 2y$ elevando al cuadrado

$4y^2 + 2y - 2 = 0$ resolviendo la ecuación

Las raíces son $y = 0{,}5$ y $y = -1$ La segunda raíz se descarta pues $2y > 0$ ya que y es una distancia.

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces, $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$$x^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$|x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como x está en el primer cuadrante cuando $t = \frac{\pi}{6}$, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

❖ **Para $t = \frac{\pi}{3}$:**

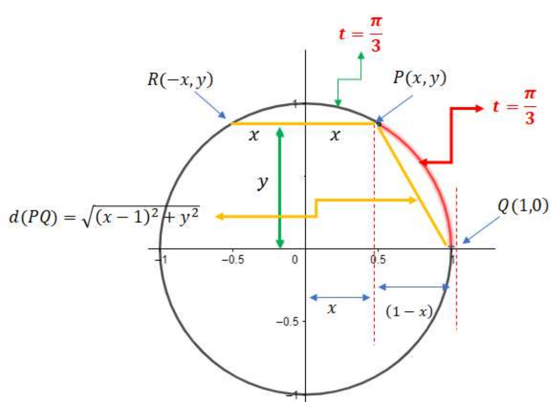


Fig. 4

$d(PQ) = d(PR) = 2x > 0$

$2x = \sqrt{y^2 + (x-1)^2} = \sqrt{y^2 + (x^2 - 2x + 1)}$ desarrollando el cuadrado

$2x = \sqrt{y^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2 - 2x}$ reordenando y $(x, y) \in C(O, 1)$

$4x^2 = 2 - 2x$ elevando al cuadrado

$4x^2 + 2x - 2 = 0$ resolviendo la ecuación

Las raíces son $x = 0{,}5$ y $x = -1 < 0$. Esta última se descarta pues $2x > 0$ ya que x es una distancia

Si $x = \frac{1}{2}$, entonces, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

$$y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como x está en el primer cuadrante, cuando $t = \frac{\pi}{3}$, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Para $t = \frac{\pi}{2}$:**

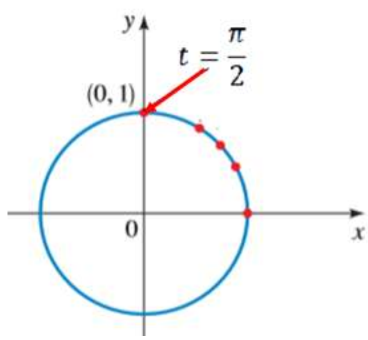
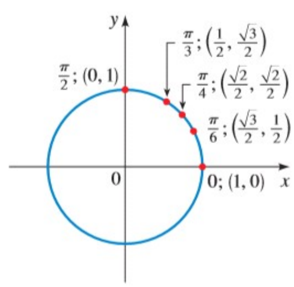


Fig. 5

Entonces, cuando $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$,$y = 1$ y P es $(0\,,1)$

Resumiendo:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Punto Terminal	$(1\,,0)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(0\,,1)$



Pregunta: ¿Para qué nos sirven estos números $t \in \mathbb{R}$ y sus respectivos puntos terminales $P(x, y)$ localizados en la circunferencia, todos en el primer cuadrante?

Respuesta: Con ayuda de ellos, podremos obtener las coordenadas de puntos en los demás cuadrantes.

Pregunta: ¿De cualquier punto?

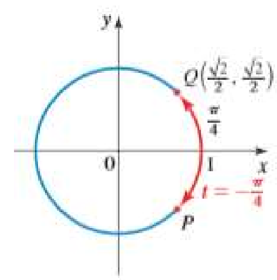
Respuesta: De inicio, infelizmente, NO, sólo de puntos simétrico a éstos, respecto de los ejes de coordenadas.

Ejemplo 4: Determinación de puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada número real dado t.

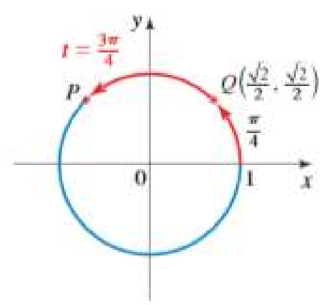
<table>
<tr>
<td>a) $t = -\frac{\pi}{4}$

El punto $P(x_1, y_1)$ determinado por $t = -\frac{\pi}{4}$ y el punto $Q(x_2, y_2)$ determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ tienen las mismas coordenadas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1 = x_2)$ pero coordenadas opuestas en el $eje\ y$ $(esto\ es,\ y_1 = -y_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el IV Cuadrante.

Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el IV Cuadrante en la circunferencia son $\left(\sqrt{2}/2\,, -\sqrt{2}/2\right)$ ♦</td>
<td>

a)</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $t = \frac{3\pi}{4}$

El punto $P(x_1, y_1)$ determinado por $t = \frac{3\pi}{4}$ y el punto $Q(x_2, y_2)$ determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ tienen las mismas coordenadas en el $eje\ y$ $(esto\ es,\ y_1 = y_2)$ pero coordenadas opuestas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1 = -x_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el IV Cuadrante.

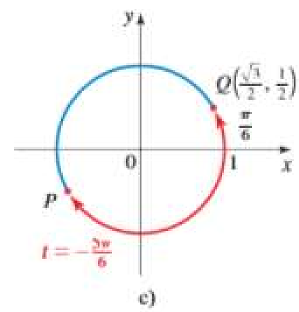
Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el II Cuadrante en la circunferencia son $\left(-\sqrt{2}/2\,, \sqrt{2}/2\right)$ ♦</td>
<td>

b)</td>
</tr>
</table>

c) $t=-\frac{5\pi}{6}$

El punto $P(x_1,y_1)$ determinado por $t=-\frac{5\pi}{6}$ y el punto $Q(x_2,y_2)$ determinado por $t=\frac{\pi}{6}$ tienen coordenadas opuestas en el $eje\ y$ $(esto\ es,\ y_1=-y_2)$ y también coordenadas opuestas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1=-x_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el III Cuadrante.

Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el III Cuadrante en la circunferencia son $\left(-\sqrt{3}/2\,,-1/2\right)$ ♦



c)

Número de Referencia y su Importancia

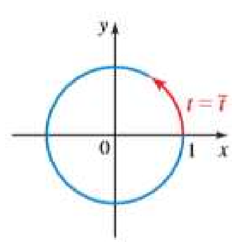
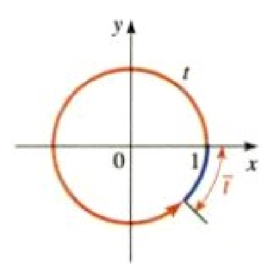
Los ejemplos anteriores muestran que, para conocer las coordenadas de un punto en cualquier cuadrante, basta conocer las coordenadas del punto correspondiente en el primer cuadrante.

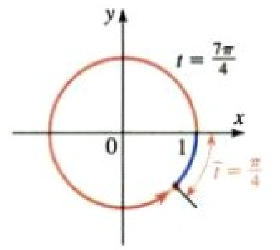
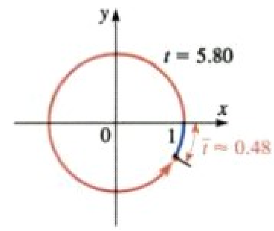
Introducimos el concepto de "número de referencia" para facilitarnos el cálculo de los puntos sobre la circunferencia.

Número de Referencia
Sea t un número real. El número de referencia $\bar{t}$ asociado a t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto sobre la circunferencia determinado por t y el $eje\ x$.

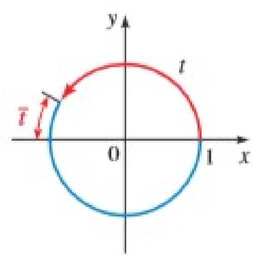
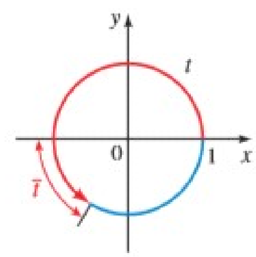
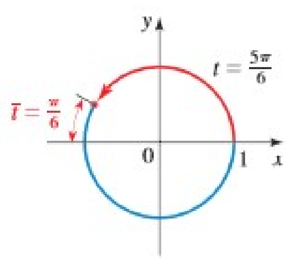
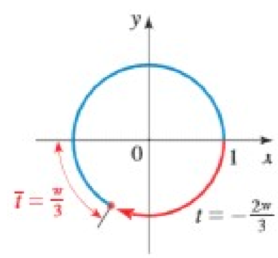
Así:

Primero y Cuarto Cuadrante

Si $t\in\mathbb{R}$ es tal que $P(x,y)$ queda en el I o IV Cuadrante, donde x es positivo, el número $\bar{t}$ lo encontramos desplazándonos a lo largo de la circunferencia hasta el eje positivo x.		
Ejemplos: a) $t=\frac{7\pi}{4}\ \rightarrow\ \bar{t}=2\pi-\frac{7\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$	a)	b)

b) $t = 5{,}80 \;\rightarrow\; \bar{t} = 2\pi - 5{,}80 \approx 0{,}48$		

Segundo y Tercer Cuadrante

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $P(x, y)$ queda en el II o III Cuadrante, donde x es negativo, el número $\bar{t}$ lo encontramos desplazándonos a lo largo de la circunferencia hasta el eje x negativo.		
Ejemplo c) $t = \frac{5\pi}{6} \;\rightarrow\; \bar{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ d) $t = -\frac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	c) 	d) 

Este procedimiento se conoce como "**Reducción al primer cuadrante**"

Ejemplo 5:

Calcule el punto terminal P sobre la circunferencia determinado por cada uno de los números reales t.

a) $t = \frac{5\pi}{6}$ b) $t = \frac{7\pi}{4}$ c) $t = -\frac{2\pi}{3}$

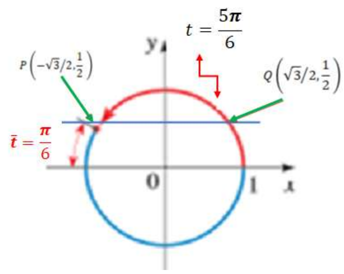
¿Cómo procedemos?

Para determinar el punto P definido por cualquier valor de t, seguimos los pasos siguientes:

1. Encontrar el número de referencia $\bar{t}$. (Recién calculado)
2. Encontrar el punto sobre la circunferencia $Q(a, b)$ definido por $\bar{t}$.
3. El punto determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se eligen de acuerdo con el cuadrante en el cual está este punto sobre la circunferencia.

a) Si $t = \frac{5\pi}{6}$, el número de referencia es $\bar{t} = \frac{\pi}{6}$, el cual define el punto $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ sobre la circunferencia conforme calculamos antes.

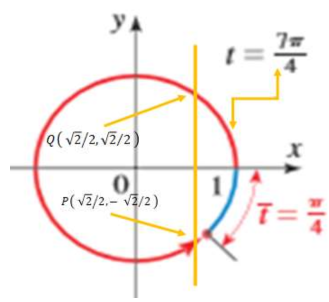
Puesto que el punto determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



♦

b) Si $t = \frac{7\pi}{4}$, el número de referencia es $\bar{t} = \frac{\pi}{4}$, el cual define el punto $Q(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ sobre la circunferencia conforme calculamos antes.

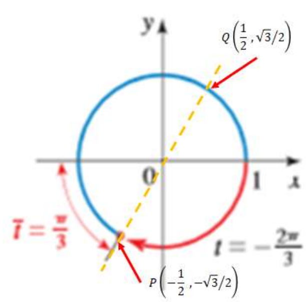
Puesto que el punto determinado por t está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.



♦

c) Si $t = -\frac{2\pi}{3}$, el número de referencia es $\bar{t} = \frac{\pi}{3}$, el cual define el punto $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sobre la circunferencia conforme calculamos antes.

Puesto que el punto determinado por t está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es $P\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



♦

Trabajo Práctico

Ejercicio N°4

Suponga que el punto definido por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ de la circunferencia unitaria. Encuentre las coordenadas del punto sobre la circunferencia definido por cada uno de los siguientes valores:

a. $\pi - t$

b. $-t$

c. $\pi + t$

d. $t - \pi$

Ejercicio N° 5

Calcule el número de referencia para cada valor de t y el punto determinado por t.

e. $t = \frac{5}{4}\pi$

f. $t = \frac{7}{3}\pi$

g. $t = -\frac{4}{3}\pi$

h. $t = \frac{\pi}{6}$

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES.

Una función real de variable real es una regla que asigna a cada número real un único número real. En la Unidad 4 nos referíamos a este hecho como unicidad y existencia.

Usaremos los puntos sobre la circunferencia unitaria para definir las funciones trigonométricas de números reales.

Sea entonces

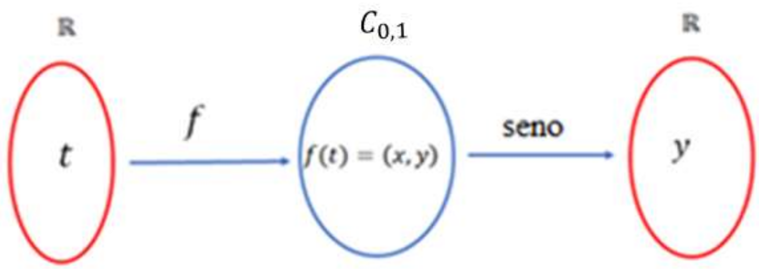
$$f:\ \mathbb{R} \to C_{O,1}$$
$$t \to f(t) = (x, y) \quad tal\ que\ x^2 + y^2 = 1$$

Con estas coordenadas de $P(x, y)$ **definimos** las funciones trigonométricas así:

Definición de las funciones Trigonométricas		
Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos		
$sen(t) = y$	$\cos(t) = x$	$\tan(t) = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$
$cosec(t) = \frac{1}{y}\ (y \neq 0)$	$sec(t) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$	$\cot(t) = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$

Dado que estas funciones se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, se las llama también funciones circulares.

Podemos esquematizar una de las funciones, a manera de ejemplo, de la siguiente manera:



$$sen: C_{O,1} \rightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \rightarrow y$$

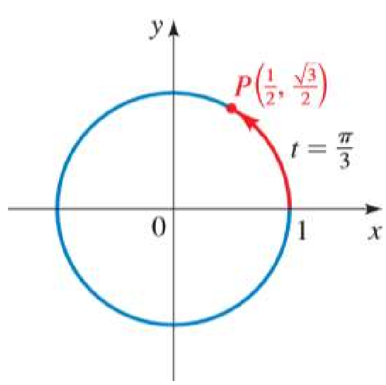
$$cos: C_{O,1} \rightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \rightarrow x$$

$$tan: C_{O,1} \rightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \rightarrow \frac{y}{x} \text{ para } x \neq 0$$

Ejemplo 6: Evaluación de las funciones trigonométricas

Calcule las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

a) $t = \frac{\pi}{3}$ b) $t = \frac{\pi}{2}$



Según la tabla, vemos que el punto determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ es $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

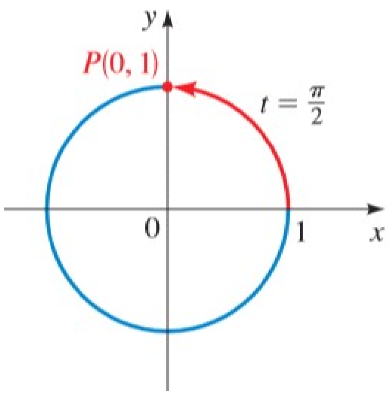
Las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por lo tanto, las funciones circulares son:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = y = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad cosec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \qquad \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \blacklozenge$$



Según la tabla, vemos que el punto determinado por $t = \frac{\pi}{2}$ es $P(0\,,1)$.

Las coordenadas son $x = 0$ e $y = 1$

Por lo tanto, las funciones circulares son:

$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = y = 1$ $\quad\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = x = 0$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\ no\ está\ definida$ $\quad\quad$ $cosec\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1} = 1$

$sec\left(\frac{\pi}{2}\right)\ no\ está\ definida$ $\quad\quad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$

Tanto $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ como $sec\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no están definidas porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

♦

Podemos hacer la siguiente tabla, de forma nemotécnica:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	$\sqrt{\mathbf{0}}/2$	$\sqrt{\mathbf{1}}/2$	$\sqrt{\mathbf{2}}/2$	$\sqrt{\mathbf{3}}/2$	$\sqrt{\mathbf{4}}/2$
Coseno	$\sqrt{\mathbf{4}}/2$	$\sqrt{\mathbf{3}}/2$	$\sqrt{\mathbf{2}}/2$	$\sqrt{\mathbf{1}}/2$	$\sqrt{\mathbf{0}}/2$

Al resolver y simplificar nos queda:

$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = y = 1$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Esta tabla puede ser completada con las demás funciones trigonométricas:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	----

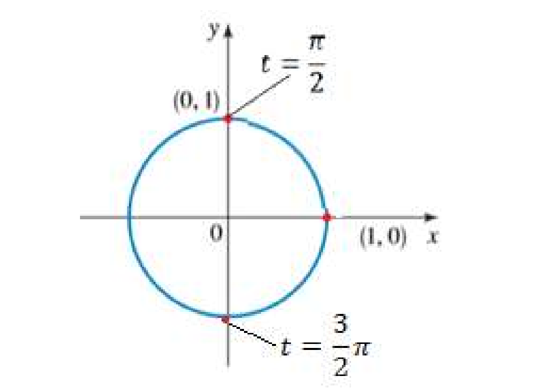
$cosec(t)$	----	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec(t)$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	----
$cot(t)$	----	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Como podemos observar, existen algunos valores de t para los cuales algunas funciones no están definidas.

Dominios de las Funciones Trigonométricas

Como $sen(t) = y$ y $cos(t) = x$, ambas funciones están definidas para todos los números reales.

Ya $\tan(t) = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ y $sec(t) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ no están definidas cuando $P(x, y)$ tiene coordenada $x = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, para $t = \frac{\pi}{2}$ y para $t = \frac{3}{2}\pi$.

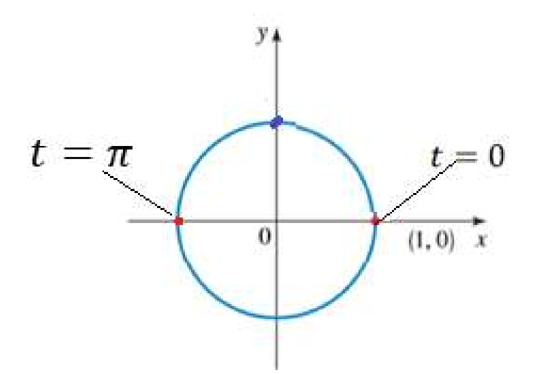


Como P pasa por estos puntos cada $n\pi$ - veces, podemos sintetizar el dominio de la $\tan(t)$ y de la $sec(t)$ como

$$\left\{t \in \mathbb{R} : \ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Como $\cot(t) = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ y $cosec(t) = \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$ no están definidas para $y = 0$, estos casos deben ser excluidos del dominio.

¿Cuándo el punto final P tiene ordenada $y = 0$?



Esto ocurre cuando $t = 0, \ \pi, \ 2\pi, \ 3\pi, \ldots, \ n\pi$, lógicamente, estos valores deben ser retirados del dominio de estas funciones. El dominio queda así:

$$\{t \in \mathbb{R} : \ t \neq n\pi \ \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$$

Dominio de las funciones trigonométricas	
Función	Dominio
$seno, coseno$	Todos los números reales
$tangente, secante$	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
$cotangente\ , cosecante$	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

Conocemos los valores de las funciones trigonométricas para los t que determinan puntos en el primer cuadrante. Para calcular los valores de las funciones en los demás cuadrantes, lo primero que necesitamos conocer son los signos que toman las mismas en los diferentes cuadrantes.

Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual se encuentre el punto determinado por t, conforme indica el siguiente cuadro.

Signos de Las Funciones Trigonométricas		
Cuadrante	Función Positiva	Función Negativa
I	Todas	Ninguna
II	Seno, Cosecante	Coseno, Secante, Tangente, Cotangente
III	Tangente, Cotangente	Seno, Cosecante, Coseno, Secante
IV	Coseno, Secante	Seno, Cosecante, Tangente, Cotangente

¿Cómo determinamos el signo de una función trigonométrica?

Ejemplo 7: Determinación del signo de la función trigonométrica

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, porque el punto determinado por $t = \frac{\pi}{6}$ está en el cuadrante I.

b) $tan\ 4\ > 0$, porque el punto determinado por $t\ =\ 4$ está en el cuadrante III.

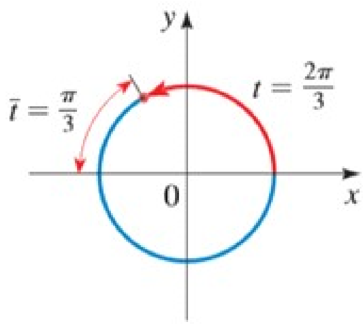
c) Si $cos\ t\ <\ 0$ y $sen\ t > \ 0$, entonces el punto determinado por t tiene que estar en el cuadrante II. ♦

Ejemplo 8: Evaluación de las funciones trigonométricas

Determine cada uno de los valores.

a) $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ c) $sen\left(\frac{19\pi}{4}\right)$

Solución



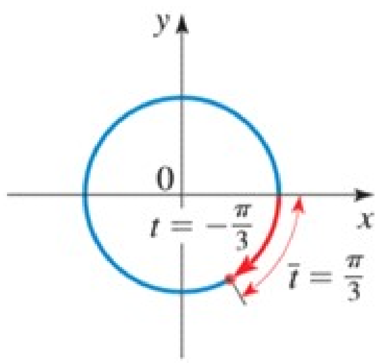
a) Paso 1: Determinar el signo: $\frac{2\pi}{3}$ $\in$ II Cuadrante, por lo tanto $\cos(\frac{2\pi}{3}) < 0$

Paso 2: Buscamos el número de referencia: $\bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Paso 3: Evaluamos la función: $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Signo — Número de referencia — Valor de la tabla ♦



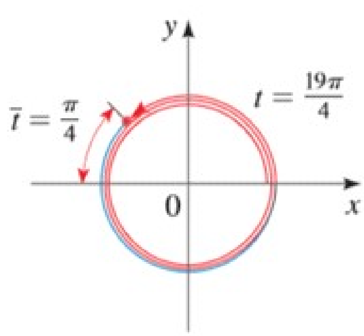
b) Paso 1: Determinar el signo: $-\frac{\pi}{3}$ $\in$ IV Cuadrante, por lo tanto $tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0$

Paso 2: Buscamos el número de referencia: $\bar{t} = \frac{\pi}{3}$

Paso 3: Evaluamos la función: $tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$$tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Signo — Número de referencia — Valor de la tabla ♦



c) Paso 0: Reducir a un giro. Como $4\pi = \frac{16}{4}\pi$,

Tenemos $\frac{19}{4}\pi - \frac{16}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$

Paso 1: Determinar el signo: $\frac{3}{4}\pi$ $\in$ IV Cuadrante, por lo tanto $sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) > 0$

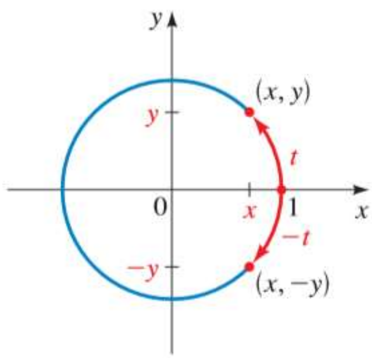
Paso 2: Buscamos el número de referencia: $\bar{t} = \frac{\pi}{4}$

Paso 3: Evaluamos la función:

$$sen\left(\frac{19}{4}\pi\right) = sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) = +sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$sen\left(\frac{19}{4}\pi\right) = sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) = +sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ Resta de 4 π · Signo · Número de referencia · Valor de la tabla ♦

Relación entre funciones trigonométricas de (t) y de $(-t)$



Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$ que se desprenden de la figura.

$$sen(-t) = -y = -sen(t)$$

$$\cos(-t) = x = \cos(t)$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan(t)$$

Funciones que se comportan como seno y tangente son denominadas impares, mientras que las que se comportan como el coseno se las denomina función par.

Se desprende que las co-funciones tienen el mismo comportamiento: cosecante y cotangente son impares, secante es par. En resumen:

Propiedades pares e impares		
El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.		
$sen(-t) = -sen(t)$	$\cos(-t) = \cos(t)$	$\tan(-t) = -\tan(t)$
$cosec(-t) = -cosec(t)$	$\sec(-t) = \sec(t)$	$\cot(-t) = -\cot(t)$

Ejemplo 9: Funciones trigonométricas pares e impares

Utilice las propiedades pares e impares de las funciones trigonométricas para determinar cada uno de los valores.

a) $sen(-\frac{\pi}{6})$ b) $\cos(-\frac{\pi}{4})$

Solución

De acuerdo con las propiedades pares-impares y la tabla, tenemos

a) $sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ El seno es impar

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ El coseno es par ♦

Ejemplo 10: Cálculo de todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una.

Si $\cos(t) = \frac{3}{5}$ y t está en el cuadrante IV, calcule los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

Solución

Sabemos que $x = \cos t$ e $y = sen\ t$, también sabemos que $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria determinado por t y vale la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que:

$$sen^2(t) + cos^2(t) = 1$$

$$sen^2(t) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustitución de } \cos(t) = \frac{3}{5}$$

$$sen^2(t) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \qquad \text{Despeje de } sen^2(t)$$

$$sen(t) = \pm\frac{4}{5} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Puesto que este punto está en el cuadrante IV, $sen(t)$ es negativo, de modo que $sen(t) = -\frac{4}{5}$. Ahora que ya conocemos tanto $sen(t)$ como $\cos(t)$, podemos calcular los valores de las otras funciones trigonométricas usando sus definiciones:

$$y = sen(t) = -\frac{4}{5} \qquad \mathrm{x} = \cos(t) = \frac{3}{5} \qquad \tan(t) = \frac{y}{x} = \frac{sen(t)}{\cos(t)} = \frac{-4/5}{3/5} = -4/3$$

$$cosec(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen(t)} = -\frac{5}{4} \qquad \sec(t) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(t)} = \frac{5}{3} \qquad cot(t) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan(t)} = -\frac{3}{4}$$

♦

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 6

Determine sin calculadora el valor exacto de la función trigonométrica en el número dado.

a. $sen\frac{2\pi}{3}$ b. $cos\frac{5\pi}{6}$ c. $tan\frac{7\pi}{3}$

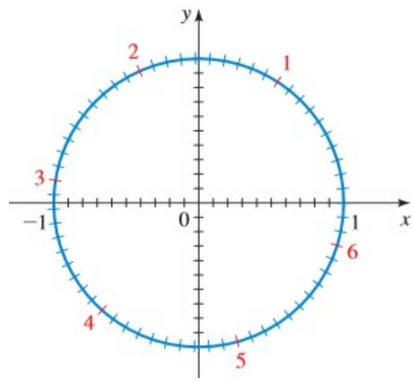
d. $cot\frac{5\pi}{4}$ e. $sec\frac{7\pi}{3}$ f. $cosec -\frac{\pi}{2}$

Ejercicio N° 7

Estime el valor aproximado de la función trigonométrica dada usando a) la figura y b) una calculadora. Compare los dos valores.

a) $sen(1)$ b) $\cos(0.8)$ c) sen (1.2) d) $\cos(5)$

e) $\tan(0.8)$ f) $\tan(-1.3)$ g) cos (4.1) h) $sen(-5.2)$



Ejercicio N° 8

Se proporciona el punto $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre $sen\ (t)$, $cos\ (t)$ y $tan\ (t)$.

a) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ d) $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

Ejercicio N° 9

Determine los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información proporcionada.

a) $sen(t) = \frac{3}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante II
b) $\cos(t) = -\frac{3}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante III
c) $\sec(t) = 3$, el punto definido por t está en el cuadrante IV
d) $\tan(t) = -\frac{3}{4}, \cos(t) > 0$

4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

La gráfica de una función describe el comportamiento de ésta.

Las funciones trigonométricas pueden ser graficadas y se les pueden aplicar las mismas transformaciones que se estudiaron en la unidad 4, a saber, sumar (dentro y fuera del argumento), multiplicar (dentro y fuera del argumento) y reflejar.

Comenzaremos graficando el seno y el coseno.

Algunas observaciones se imponen. La primera es que dichas funciones, al estar definidas en función de las coordenadas del punto $P(x, y)$ sobre la circunferncia unitaria, necesariamente, repiten su valor según cierto patrón.

Recordemos que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π. Podemos inferir entonces que el punto $P(x, y)$ determinado por (t) es el mismo que el determinado por $(t + 2\pi)$. Este hecho lo podemos expresar en término de las funciones trigonométricas. Así:

$$sen(t + 2n\pi) = sen(t) \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos(t) \qquad \text{para cualquier entero } n$$

A este tipo de funciones se las conoce como funciones periódicas.

Una función se dice **periódica** si existe un número positivo "p" tal que $f(t + p) = f(t)$ para todo t.

Tal número positivo mínimo "p" , si existe, es llamado de periodo de la función f.

Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p <u>es un periodo completo de f</u>.

Propiedades periódicas del seno y el coseno
Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π: $sen(t + 2\pi) = sen(t) \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos(t)$

Por tanto, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π.

Generalmente graficamos un periodo. En este caso, el comprendido entre $0 \leq t < 2\pi$

Podemos usar varios Métodos:

Método 1. <u>Mediante calculadora</u>: completar una tabla de valores, localizar los puntos en el plano cartesiano y trazar la gráfica.

Método 2. Usar los elementos aprendidos en la unidad de funciones sobre la caracterización de éstas: Dominio, aquí $0 \leq t < 2\pi$, ceros, puntos de máximo y de mínimo, junto con algunos recursos del ítem anterior, si se hace necesario.

Método 3. Usar un método geométrico, el cual creemos más apropiado, por lo menos en la construcción de la gráfica de la función seno.

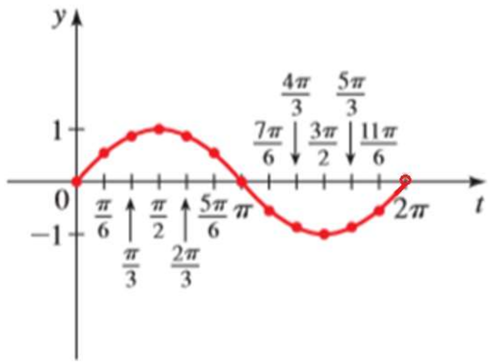
Veamos cómo procedemos con cada uno de estos métodos, sus ventajas y desventajas.

Función Seno

Método 1.

Usando esta tabla de valores construida con ayuda de la circunferencia trigonométrica (reducción al primer cuadrante- ejemplo 4 y 5), localizamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen} t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Un periodo de $y = sen(t)$

$0 \leq t < 2\pi$

La principal dificultad de este método consiste en la localización de puntos tales como $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, incluso del propio $(\pi, 0)$

Método 2.

Como vamos a graficar sólo un periodo, nuestro dominio "restringido" será $0 \leq t < 2\pi$. En forma de intervalo $[0, 2\pi)$.

Cabe preguntarnos por la imagen del $sen(t)$.

Como sen(t) es la ordenada del punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, entonces, $-1 \leq y \leq 1$. Esto nos lleva a concluir que $-1 \leq sen(t) \leq 1$. O sea, que la Imagen del $sen(t)$ es el intervalo $[-1\,, 1]$

La pregunta es: ¿Dónde ocurren estos **valores extremos** de la función?

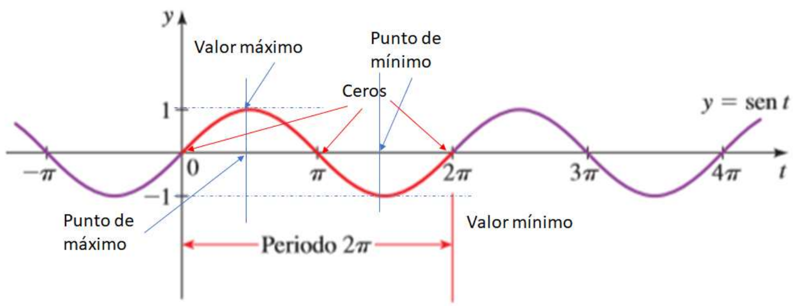
La tabla anterior nos muestra que, el $sen(t) = 1$ si $t = \frac{\pi}{2}$ y $sen(t) = -1$ si $t = \frac{3\pi}{2}$

Veamos ahora los **ceros** de la función $sen(t)$. De la tabla anterior vemos que estos ocurren en $t = 0\ ;\ \pi\ ;\ 2\pi$

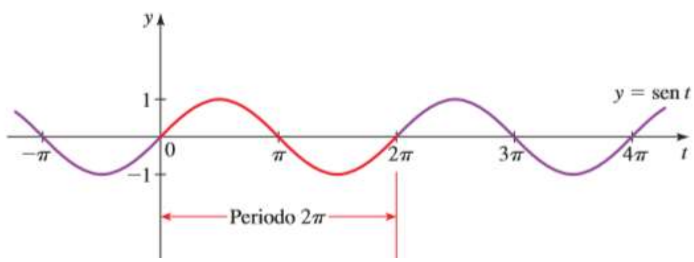
En este método necesitamos "conocer medianamente" el comportamiento de la función. Para tal fin podemos hacer un análisis simplificado usando esta tabla.

t	sen t	
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	la función es creciente
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	la función es decreciente
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	la función es decreciente
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	la función es creciente

Esto nos permite hacer un esbozo con todos estos datos:



Una imagen simplificada que conviene guardar en nuestra memoria es:



¿Cuál es la desventaja de estos dos métodos?

En el primero, la de la localización de puntos con coordenadas irracionales. En el segundo, que debo tener conocimiento previo del comportamiento de la función.

Método 3.

Para este método necesitamos el auxilio de la circunferencia trigonométrica. La ventaja que tiene, es que nos da una mejor idea del “significado del seno” y nos permite hacer el vínculo entre los dos enfoques de la trigonometría, de los cuales hablamos al inicio de la unidad.

Con el auxilio de una circunferencia trigonométrica, trazamos sobre el eje x del sistema cartesiano, la longitud de ésta. Este punto sobre el eje corresponde a 2π.

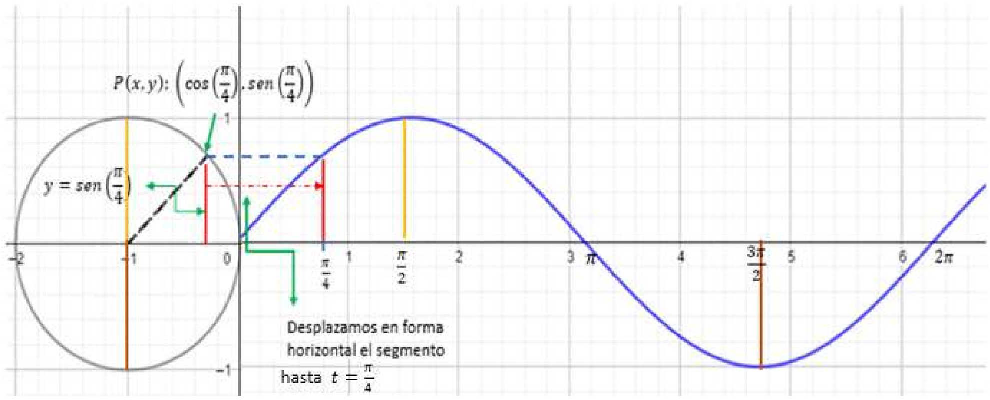
Dividimos el intervalo$[0, 2\pi]$ en 2 y marcamos π. Tenemos ahora $[0, \pi]$; $[\pi, 2\pi]$.

Podemos dividir cada uno de estos subintervalos, a su vez en 2. Tenemos entonces $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

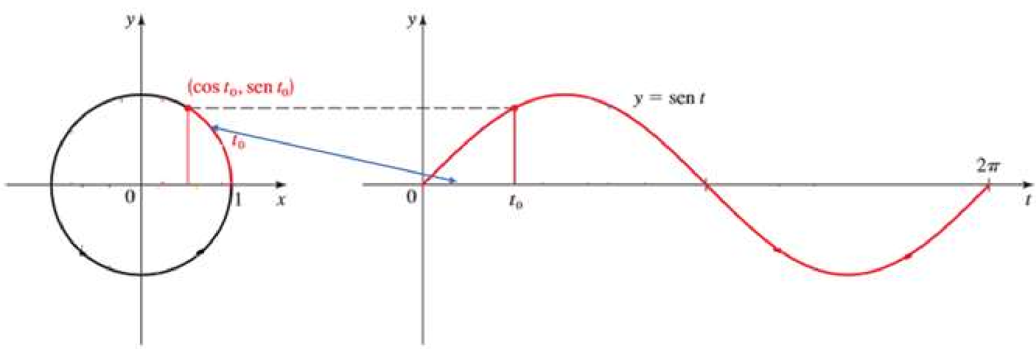
Podemos repetir este proceso varias veces.

Sobre la circunferencia trigonométrica podemos ir haciendo la misma subdivisión.

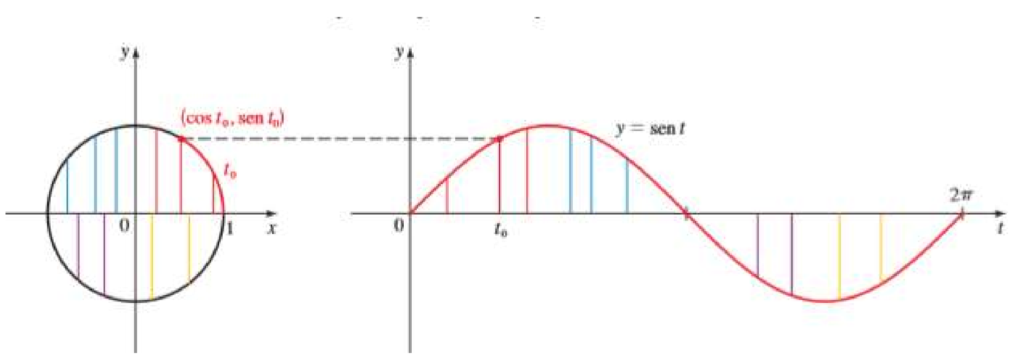
El siguiente gráfico muestra para el punto $P(x,y) = \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right), sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ cómo encontrar su correspondiente $\left(\frac{\pi}{4}, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ para ir construyendo la gráfica $f(t) = sen(t)$. Usamos aquí la variable t para evitar confusiones con la coordenada x.



Un esquema simplificado se muestra a continuación para un punto genérico $\left(\cos(t_0), sen(t_0)\right)$.



En la siguiente gráfica se muestra la correspondencia entre varios puntos de la circunferencia trigonométrica y los correspondientes en la gráfica de la función seno.



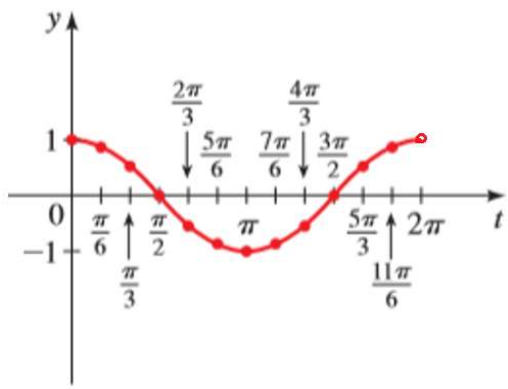
Función Coseno

Analizaremos ahora la función Coseno.

Método 1.

Al igual que en el caso de la función seno usamos una tabla de valores construida con ayuda de la circunferencia trigonométrica, localizamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Un periodo de $y = cos(t)$

$0 \leq t < 2\pi$

La principal dificultad continúa siendo la misma, o sea, la localización de puntos tales como $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, incluso del propio $(\pi, 0)$

Método 2.

También vamos a graficar sólo un periodo y nuestro dominio "restringido" será $0 \leq t < 2\pi$. En forma de intervalo $[0, 2\pi)$.

Como $cos(t)$ es la ordenada del punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, entonces, $-1 \leq x \leq 1$. Esto nos lleva a concluir que $-1 \leq cos(t) \leq 1$. Es decir, que la Imagen del $cos(t)$ es $[-1\,, 1]$.

¿Dónde ocurren estos **valores extremos** de la función?

La tabla anterior nos muestra que, el $cos(t) = 1$ si $t = 0$ ó $t = 2\pi$ y $cos(t) = -1$ si $t = \pi$

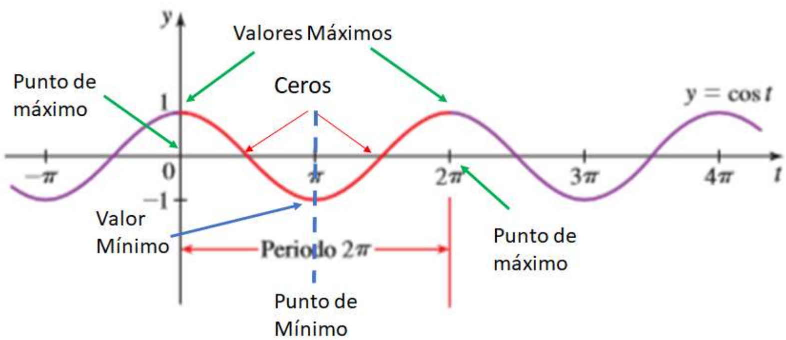
Veamos ahora los ceros de la función $\cos(t)$. De la tabla anterior vemos que estos ocurren en

$t = \frac{\pi}{2}$ $y\ en\ t = \frac{3\pi}{2}$.

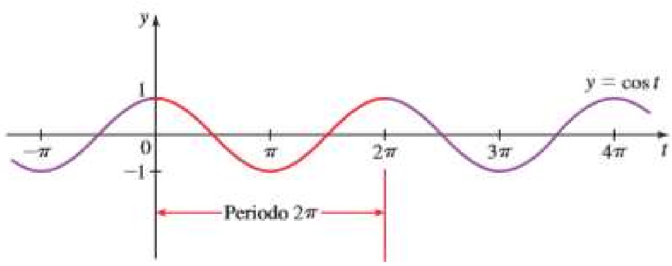
Analicemos el comportamiento del coseno como lo hicimos con el seno.

t	$\cos t$	
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$1 \to 0$	la función es decreciente
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$0 \to -1$	la función es decreciente
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$-1 \to 0$	la función es creciente
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$0 \to 1$	la función es creciente

Esto nos permite hacer un esbozo con todos estos datos:



La imagen simplificada que conviene guardar en nuestra memoria es:



Método 3.

La dificultad de aplicar el método geométrico para graficar la función coseno está en que el segmento que representa al coseno está sobre el $eje\ x$, entonces, hay que colocar este segmento horizontal en forma vertical. No utilizaremos aquí este método por la dificultad manifestada. ♦

5. GRÁFICAS DE TRANSFORMACIONES DE SENO Y COSENO

A partir de ahora, como no utilizaremos más la circunferencia trigonométrica, haremos uso de la letra x para representar la variable independiente de las funciones trigonométricas.

Consideraremos las gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Podemos utilizar las mismas técnicas de graficación de las funciones de la Unidad 4.

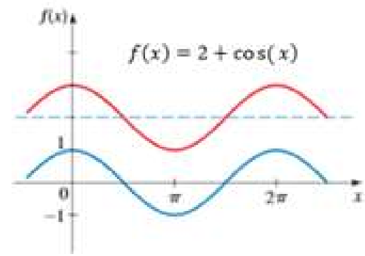
Ejemplo 11: Curvas del coseno

Trace la gráficas de cada función.

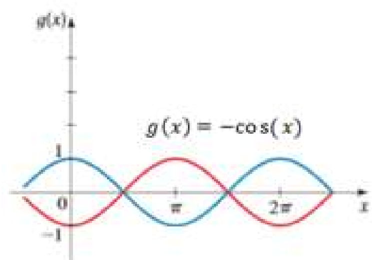
a) $f(x) = 2 + \cos(x)$ b) $g(x) = -\cos(x)$

Solución

a) La gráfica de $y = cos(x)$, se desplaza hacia arriba 2 unidades, como ocurriría con cualquier función estudiada en la Unidad 4.

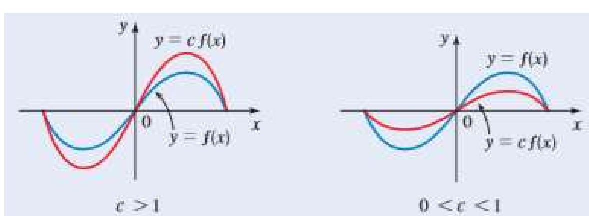


b) Al multiplicar por (-1) se produce una reflexión respecto del *eje x* de la gráfica $y = \cos(x)$, como ocurriría con cualquier función estudiada en la Unidad 4.



Recordemos el efecto que tiene el multiplicar fuera del argumento una función.

Para graficar $y = cf(x)$:
Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica $y = f(x)$ de por un factor de c.
Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$por un factor de c.

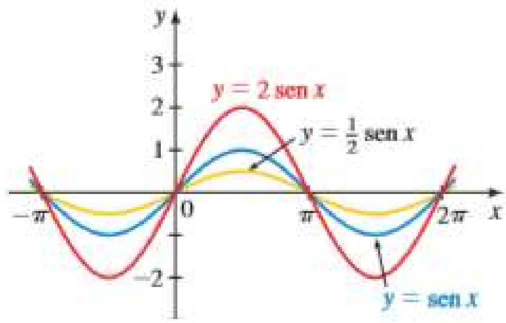


Ejemplo 12:

- Para graficar $y = 2\ sen\ (x)$

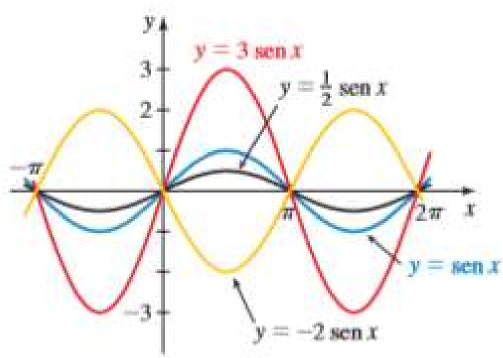
Empezamos con la gráfica de $y = sen(x)$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por 2. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica por un factor de 2. ♦

- Para graficar $y = \frac{1}{2} sen(x)$, empezamos por graficar $y = sen(x)$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por $\frac{1}{2}$. El efecto de esta operación es acortar verticalmente la gráfica por un factor de $\frac{1}{2}$. ♦



> Generalizando: En las funciones
>
> $$y = a\ \text{sen}(x) \qquad\qquad y = a\cos(x)$$
>
> el número $|\boldsymbol{a}|$ se llama **amplitud** y corresponde, en este caso, al valor más grande que alcanzan estas funciones. En caso de estar desplazada verticalmente la gráfica, la amplitud es la mitad de la “distancia entre el valor máximo y el valor mínimo”

Las gráficas de $y = a\ sen(x)$ para varios valores de a se ilustran en la figura siguiente:



Puesto que las funciones seno y coseno tienen periodo de 2π, las funciones

$$y = a\ sen(kx) \quad \text{y} \quad y = a\ cos(kx) \quad (k > 0) \ \ (1)$$

completan un periodo cuando el argumento (kx) varía desde 0 hasta 2π, es decir, cuando

$$0 \le kx < 2\pi$$

$$0 \le x < \frac{2\pi}{k}$$

Esto nos lleva a concluir que $y = a\ sen(kx)$ y $y = a\ cos(kx)$ completan un periodo cuando x varía entre 0 y $\frac{2\pi}{k}$. O sea, tienen periodo $p = \frac{2\pi}{k}$.

Las gráficas de las funciones (1) se llaman **curvas seno y coseno**, respectivamente y por su forma se las conoce como curvas sinusoidales y modelan fenómenos ondulatorios

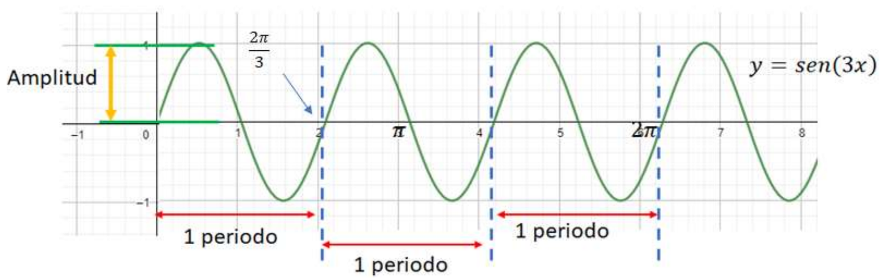
Curvas seno y coseno
Las curvas seno y coseno $y = a\ sen(kx)$ y $y = a\ cos(kx)$ $(k > 0)$ Tienen amplitud $\lvert a \rvert$ y periodo $p = \frac{2\pi}{k}$ Un intervalo adecuado para graficar en él un periodo completo es $\left[0; \frac{2\pi}{k}\right)$

Veamos el efecto del valor k en la gráfica de $y = sen(kx)$:

Para $k = 3$

$y = sen(3x)$

<u>Periodo</u> $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$
<u>Amplitud</u>: $\lvert a \rvert = 1$
Intervalo Adecuado: $\left[0; \frac{2\pi}{k}\right) = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$



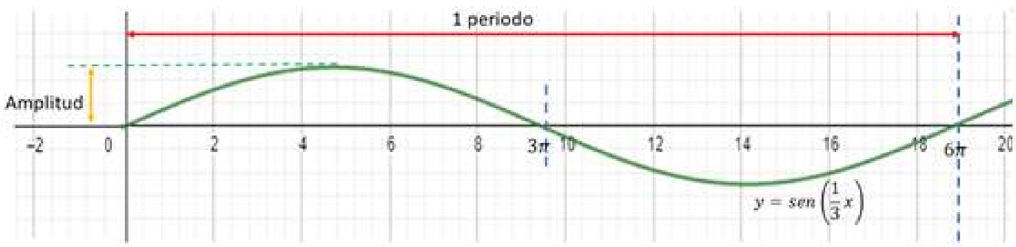
Para $k = \frac{1}{3}$

$y = sen\left(\frac{1}{3}x\right)$

<u>Periodo</u> $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

<u>Amplitud</u>: $\lvert a \rvert = 1$

Intervalo Adecuado: $\left[0; \frac{2\pi}{k}\right) = [0; 6\pi)$



Veamos algunos ejemplos:

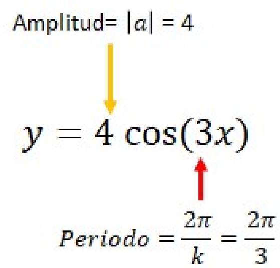
Ejemplo 13: Amplitud y periodo

Determine la amplitud y el periodo de cada una de las funciones, y trace la gráfica.

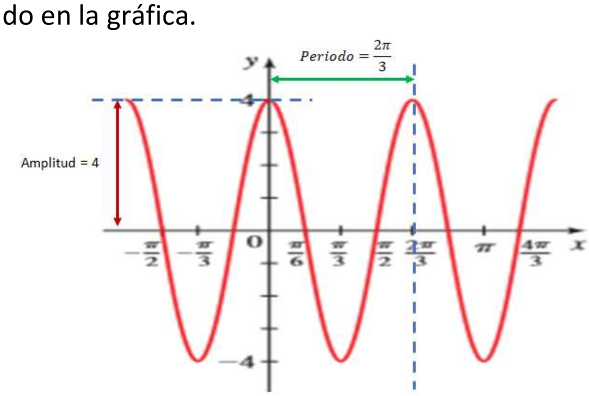
a) $y = 4\cos(3x)$ b) $y = -2\, sen(\left(\frac{1}{2}x\right)$

Solución

a) De la ecuación de la función obtenemos la amplitud y el periodo de la siguiente forma:

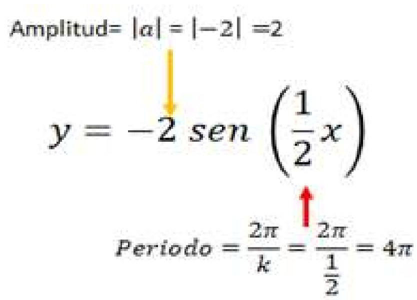


Amplitud = $|a|$ = 4
Periodo = $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$
Esto se ve reflejado en la gráfica.



♦

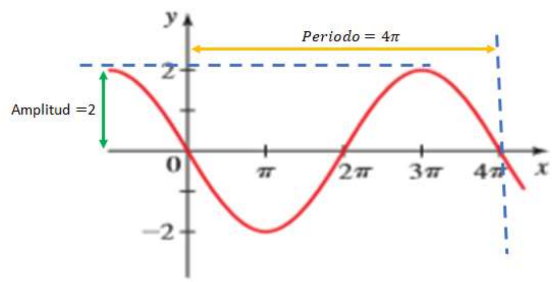
b) $y = -2\, sen(\left(\frac{1}{2}x\right)$



Amplitud = $|a| = |-2| = 2$

Periodo = $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Esto se ve reflejado en la gráfica.



Observe que la gráfica original del seno está refleja respecto del $eje\ x$ por estar multiplicada por (-2)♦

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 10

Dibuje la gráfica de las funciones

a) $y = 3 + \cos(x)$ b) $y = -2 - sen(x)$ c) $y = |sen(x)|$

Ejercicio N° 11

Determine la amplitud y el periodo de la función, y dibuje su gráfica.

a) $y = \cos(2x)$ b) $y = -3sen(3x)$ c) $y = 4sen(-2x)$

Curvas desplazadas horizontalmente.

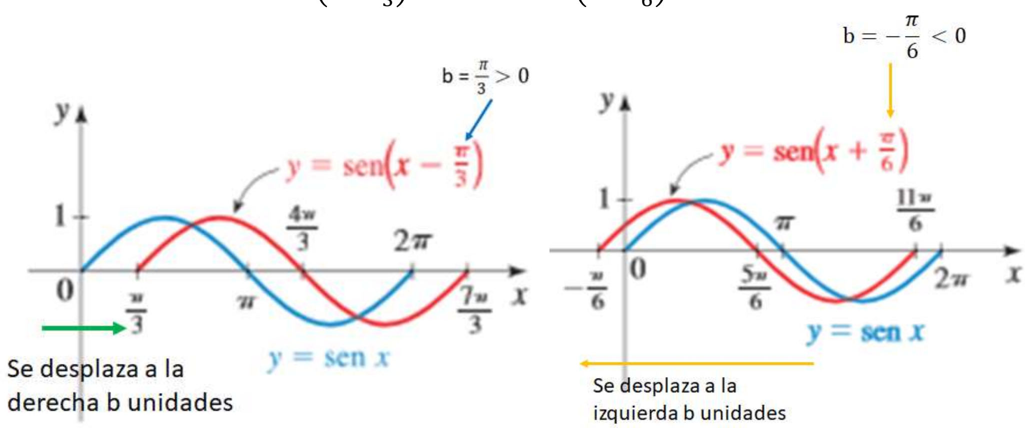
Si las funciones tienen la forma $y = a\ sen\ k(x - b)$ o $y = a\ cos\ k(x - b)$, sus gráficas son simplemente curvas seno o coseno, respectivamente, desplazadas en el sentido horizontal por una cantidad $|b|$.

Al igual que en las funciones estudiadas en la Unidad 4, se desplazan a la derecha si $b > 0$, o bien, a la izquierda si $b < 0$. El número b es el **desplazamiento de fase**. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

Curvas seno y coseno desplazadas
Las curvas seno y coseno $y = a\ sen\ k(x-b)$ y $y = a\ cos\ k(x-b)$ $(k>0)$ tiene amplitud $\lvert a \rvert$, periodo $\frac{2\pi}{k}$ y desplazamiento de fase b Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[b;\ b + (2\pi/k))$

Ejemplo 14:

Veamos las gráficas de $y = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



Ejemplo 15: Una curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de $y = 3\ sen\ 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y grafique un periodo completo.

Solución

$|a| = 3$ $\quad k = 2$ $\quad b = \frac{\pi}{4} > 0$

$$y = 3\ sen\ 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Amplitud: $|a| = 3$

Periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Desplazamiento de la fase: $b = \frac{\pi}{4} > 0$ desplazamiento a la derecha

Intervalo Adecuado: $[b;\ b + (2\pi/k)) = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$

Veremos dos estrategias para hacer el gráfico:

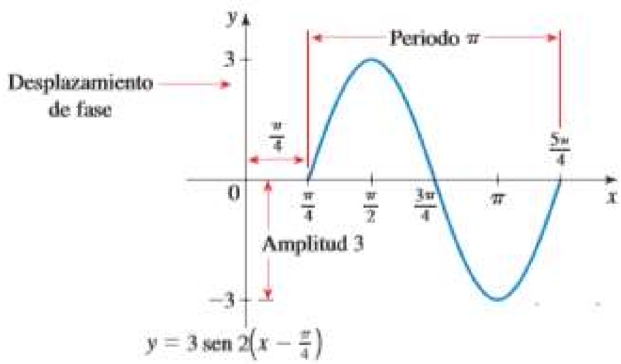
Primera estrategia:

1- Al intervalo adecuado, lo dividimos en cuatro segmentos congruentes (de la misma longitud).

2- Como el periodo es π unidades, la longitud de cada subintervalo es de $\frac{\pi}{4}$ unidades. Los extremos de estos subintervalos se obtienen sumando $\frac{(periodo)}{4}$ al extremo final del subintervalo anterior. Así:

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$; $\left[\pi, \pi+\frac{\pi}{4}\right] = \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$

3- Iniciando en $\frac{\pi}{4}$ y trazamos la gráfica con la forma de la gráfica del seno y de amplitud 3.



Ceros: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$; $x_3 = \frac{5\pi}{4}$

Punto Máximo en: $x = \frac{\pi}{2}$

Punto Mínimo en: $x = \pi$

Segunda estrategia:

Esta manera es más analítica y consiste en calcular los ceros, el máximo y el mínimo.

Cálculo de los Ceros:

Como $sen(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ,\ x = \pi\ ,\ x = 2\pi$

$$3\ sen\ 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4}}$$

$$2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \Rightarrow 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow x = \pi+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5\pi}{4}}$$

Cálculo de la abscisa del punto de máximo:

Como $sen(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$3\ sen\ 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$$

<u>Cálculo de la abscisa del punto de mínimo</u>:

Como $sen(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$$3\ sen\ 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow$$

$\boldsymbol{x = \pi}$

Teniendo identificados los puntos y conociendo la forma de la gráfica, procedemos a su trazado como muestra la figura anterior. ♦

En el último ejemplo, **el coeficiente de la x es 1**.

¿Qué ocurre si el coeficiente no es 1?

Ejemplo 16: Otra curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de

$$y = \frac{3}{4} cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un periodo completo.

Solución

Aquí la x tiene coeficiente 2. Entonces llevamos la ecuación dada a la forma $y = a\ cos\ k(x - b)$.

Sacamos como factor el 2 de la expresión $\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$y = \frac{3}{4} cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\cos 2\left(x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

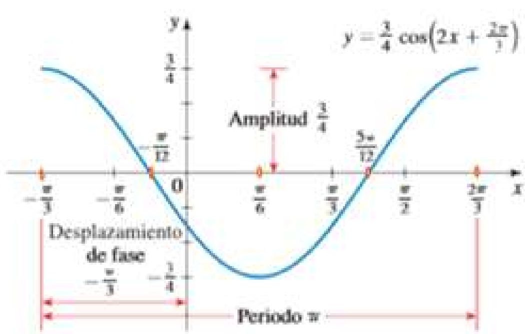
y procedemos como en el ejemplo anterior, usando cualquiera de las dos estrategias.

<u>Amplitud</u>: $|a| = \frac{3}{4}$

<u>Periodo</u> $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

<u>Desplazamiento de la fase</u>: $b = -\frac{\pi}{3} < 0$ desplazamiento a la izquierda

<u>Intervalo Adecuado</u>: $[b;\ b + (2\pi/k)) = \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$



Trabajo Práctico

Ejercicio N° 12

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función, y grafique un periodo completo.

a. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b. $y = 5\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

c. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

d. $y = \text{sen}\,(\pi + 3x)$

Ejercicio N° 13

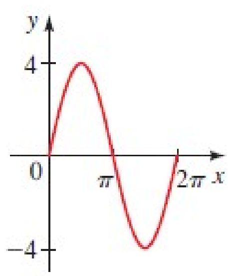
Se proporciona la gráfica de una curva seno o coseno.

a. Calcule la amplitud, período y desplazamiento de fase.

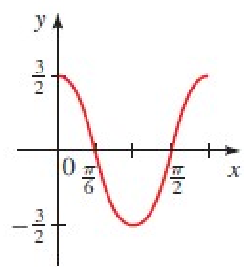
b. Escriba una ecuación que represente la curva en la forma:

$y = a\,.\,\text{sen}\big(k\,.\,(x-b)\big)$, o bien $y = a\,.\cos\big(k\,.\,(x-b)\big)$

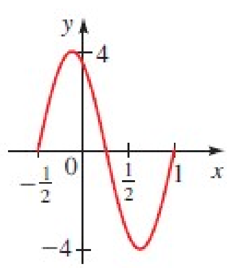
I.



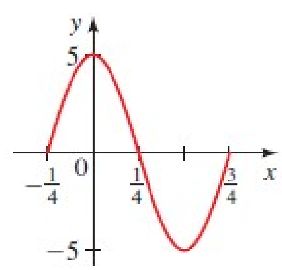
II



III



IV



Ejercicio N° 14

Grafique las funciones $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$ y $g(x) = \mathrm{sen}^2\,x$; y complete la siguiente tabla:

	$f(x)$	$g(x)$
Dominio:		
Imagen:		
Ordenada al origen		
Intersecciones con el eje x en $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$		

6. GRAFICAS DE LA FUNCIÓN TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE.

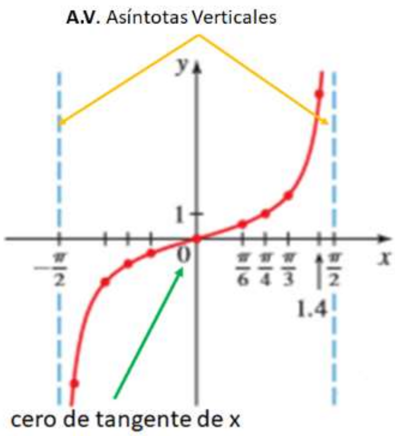
Analizaremos la periodicidad de las funciones:

El seno y el coseno tienen periodo 2π. La cosecante y la secante, que son los recíprocos de estos, respectivamente, también tienen periodo 2π.

Vimos que $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$. Cuando $x = \pm\frac{\pi}{2}, x = \pm\frac{3}{2}\pi$, …. el valor del coseno es 0 y la tangente no está definida. Ya $cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$. Cuando $x = 0$, $x = \pm\pi$, …. el valor del seno es 0 y la cotangente no está definida. Esto hace que la periodicidad de ambas funciones sea π.

Propiedades Periódicas
La función tangente y cotangente tiene periodo π: $tan(x+\pi) = tan(x) \qquad cot(x+\pi) = cot(x)$ Las funciones cosecantes y secantes tienen periodo 2π. $cosec(x+2\pi) = cosec(x) \qquad sec(x+2\pi) = sec(x)$

En las x donde el coseno se hace cero, la tangente presenta una asíntota vertical. Un intervalo adecuado para representar un periodo es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$y = \tan(x)$

Analizando el comportamiento del cociente $\frac{sen(x)}{cos(x)}$ podemos concluir que cuando x se acerca a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, la tangente tiende a infinito. O sea:

$$\tan(x) \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^-$$

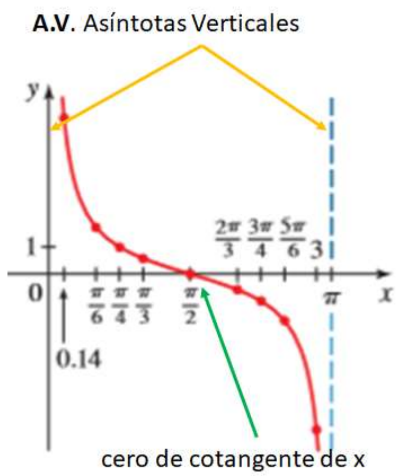
Cuando x se acerca a $-\frac{\pi}{2}$ por la derecha, la tangente tiende a menos infinito. O sea:

$$\tan(x) \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^+$$

Si $x = 0$, $sen(x) = 0$ entonces $\tan(x) = 0$.

Su gráfico está a la izquierda.

En las x donde el seno se hace cero, la cotangente presenta una asíntota vertical. Un intervalo adecuado para representar un periodo es $(0, \pi)$.



$y = \cot(x)$

Analizando el comportamiento del cociente $\frac{cos(x)}{sen(x)}$ podemos concluir que cuando x se acerca a π por la izquierda, la cotangente tiende a menos infinito. O sea:

$$\cot(x) \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pi^-$$

Cuando x se acerca a 0 por la derecha, la cotangente tiende a infinito. O sea:

$$\cot(x) \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+$$

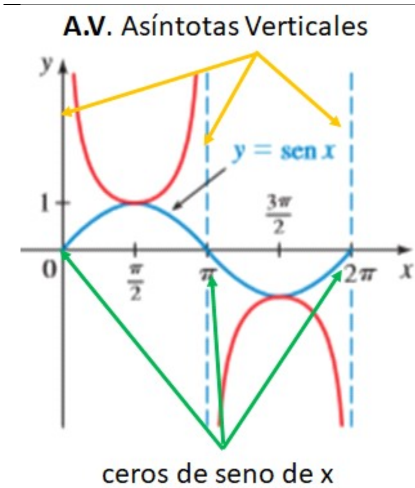
Su gráfico está a la izquierda.

Veamos las gráficas de secante y cosecante.

Usaremos las identidades recíprocas para graficar: $y = cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$ e $y = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$

Función Cosecante

Podemos hacer el mismo análisis sobre la tendencia de la función, conforme el denominador se acerca a los ceros por derecha y por izquierda. Esto queda reflejado de forma resumida en:



$y = cosec(x)$

$$y = cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

Analicemos primero el intervalo $(0, \pi)$, o sea, $0 < x < \pi$

Si $\quad x = \frac{\pi}{2}$, $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ entonces $\quad cosec\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$cosec(x) \to \infty$ cuando x→ 0^+

$cosec(x) \to \infty$ cuando x→ π^-

Analicemos ahora el intervalo $(\pi, 2\pi)$, o sea, $\pi < x < 2\pi$

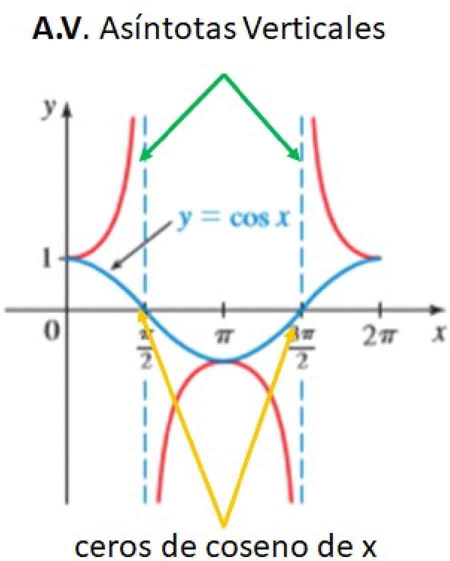
Si $\quad x = \frac{3\pi}{2}$, $sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ entonces $\quad cosec\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$cosec(x) \to -\infty$ cuando x→ π^+

$cosec(x) \to -\infty$ cuando x→ $2\pi^-$

Función Secante

Hacemos el mismo análisis sobre la tendencia de la función, conforme el denominador se acerca a los ceros por derecha y por izquierda que hicimos en la función cosecante. Aquí debemos considerar tres intervalos: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$



$y = sec(x)$

$$y = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

Analicemos primero el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, o sea, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Si $\quad x = 0$, $\cos(0) = 1$ entonces $\quad sec(0) = 1$

$sec(x) \to \infty$ cuando x→ 0^+

$sec(x) \to \infty$ cuando x→ $\frac{\pi}{2}^-$

Veamos ahora el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, o sea $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,

Si $\quad x = \pi$, $sen(\pi) = -1$ entonces $\quad sec(\pi) = -1$

$sec(x) \to -\infty$ cuando x→ $\frac{\pi}{2}^+$

$sec(x) \to -\infty$ cuando x→ $\frac{3\pi}{2}^-$

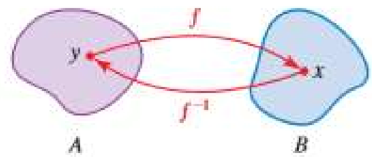
Analicemos finalmente el intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, o sea, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Si $\quad x = 2\pi$, $\cos(2\pi) = 1$ entonces $\quad sec(2\pi) = 1$

$sec(x) \to -\infty$ cuando x→ $\frac{3\pi}{2}^-$

7. FUNCIÓN INVERSA.

Si f es una función biyectiva con dominio A e imagen B, entonces su inversa f^{-1} es la función con dominio B e imagen A definida po $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ como muestra el esquema



$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Con f^{-1} invertimos la acción de f.

Sólo las funciones biyectivas tienen inversa.

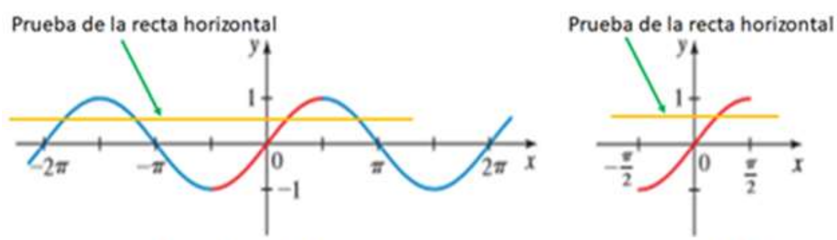
Las funciones trigonométricas no son biyectivas, teóricamente no tienen inversas.

No obstante, es posible hacer una restricción de los dominios de tal manera que las funciones resultantes sean biyectivas.

En este curso analizaremos las inversas de las funciones seno coseno y tangente.

La función inversa del seno

Se puede restringir de varias maneras el dominio del seno de modo que la nueva función sea biyectiva. Por ejemplo: el nuevo dominio puede ser el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donde el seno toma los valores entre -1 y 1 exactamente una vez ya que: $-1 \leq sen(x) \leq 1$ cuando $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ como muestra la figura abajo:



no es biyectiva

$y = sen(x)$

es biyectiva

$y = sen(x), -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

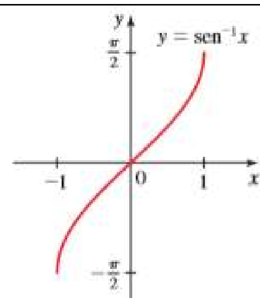
Entonces, podemos definir que la función inversa del sen^{-1} así:

$$sen^{-1}: \ [-1, 1] \ \rightarrow \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

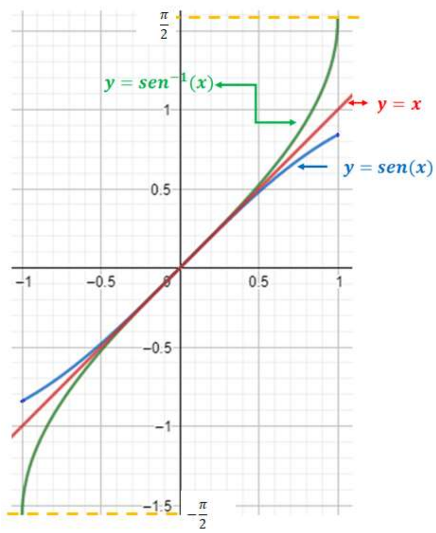
tal que $\quad sen^{-1}(x) = y \underset{df}{\Leftrightarrow} sen(y) = x$

La gráfica de la función sen^{-1} es:

Definición de la función inversa del seno
La función inversa del seno es la función sen^{-1} con dominio $[-1\,,1]$ e imagen $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ definida por $$sen^{-1}(x) = y \underset{df}{\Leftrightarrow} sen(y) = x$$ La función inversa del seno también se llama **arco seno** y se escribe como **arcsen**.



Y se obtiene reflejando la gráfica del $y = sen(x)$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, respecto a la recta $y = x$



Cálculo de la función inversa.

¿Cómo encontramos el valor de $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$? Esto es, ¿cómo pensar $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$?

$$sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ es un número } a, -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}, \text{ tal que } sen(a) = \frac{1}{2}.$$

$$sen(a) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\pi}{6}$$

Por todo lo anterior: $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = a \;\Leftrightarrow\; sen(a) = \frac{1}{2}$ y esto ocurre si $a = \frac{\pi}{6}$

Luego: $sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

La pregunta sería entonces: ¿Cuál es número cuyo seno es $\frac{1}{2}$?

Ejemplo 17: Evaluación de la función inversa seno

Determine:

a) $sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, b) $sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $sen^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

Solución

a) El número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, $sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

b) El número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $-\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, $sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

c) Como $\frac{3}{2}>1$, este valor no pertenece al dominio de la función sen^{-1}, luego, $sen^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ no está definido. ♦

Sabemos que la composición de las funciones inversas nos da las identidades correspondientes.

Recordando la composición de funciones $f\circ f^{-1}=sen\circ sen^{-1}$ y $f^{-1}\circ f=sen^{-1}\circ sen$

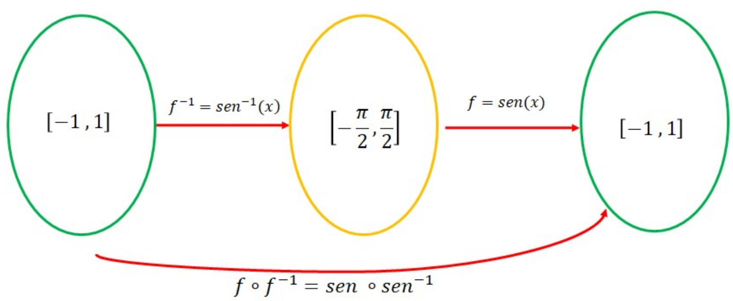


Fig. 1

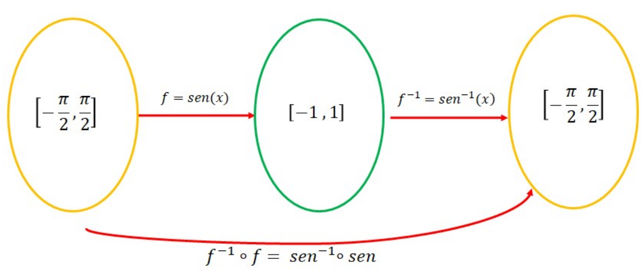


Fig. 2

Podemos analizar la variación de x en cada una de las composiciones así:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\left(sen^{-1}(x)\right)=x \quad \text{para} \quad -1\le x\le 1 \\ sen^{-1}\left(sen(x)\right)=x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

Ejemplo 18: Combinación de funciones trigonométricas y sus inversas

Calcule $cos\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

Solución

- Método 1:

Es fácil determinar $sen\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$. De hecho, de acuerdo con las propiedades de las funciones inversas, este valor es exactamente, $\frac{3}{5}$. Para determinar $cos\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ se le reduce al problema más fácil de escribir la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$. Como $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $cos(u)$ es positiva y podemos escribir:

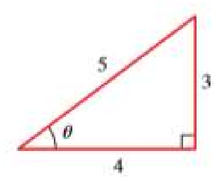
$$\cos(u) = +\sqrt{1 - sen^2(u)}$$

Por lo tanto

$$\cos\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) = +\sqrt{1 - sen^2\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

- Método 2:

Sea $\theta = sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$. Entonces, θ es el número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{3}{5}$.



Interpretemos a θ como un ángulo y dibujemos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos, cuyo cateto opuesto mide 3 y la hipotenusa mide 5. El cateto restante del triángulo se determina mediante el teorema de Pitágoras y resulta ser 4. Según la figura, tenemos:

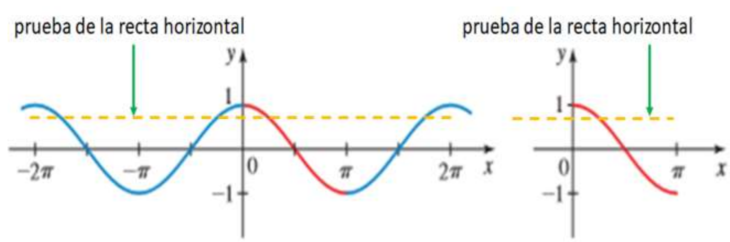
$$\cos\left(sen^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

♦

La Función Inversa del Coseno

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$,la función resultante es biyectiva, por lo que tiene una inversa.

Elegimos este intervalo porque en él el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez como muestra la figura abajo.



no es biyectiva $y = \cos(x)$ es biyectiva $y = \cos(x), 0 \leq x \leq \pi$

Definición de la función inversa del coseno
La función inversa del coseno es la función cos^{-1} con dominio $[-1\,,1]$ e imagen $[0,\pi]$ definida por $$cos^{-1}(x) = y \underset{df}{\Leftrightarrow} cos(y) = x$$ La función inversa del coseno también se llama **arco coseno** y se escribe como **arccos**.

La gráfica de la función cos^{-1} (fig. 3), al igual que sen^{-1}, es simétrica respecto de la recta $y = x$ como muestra la fig. 4.

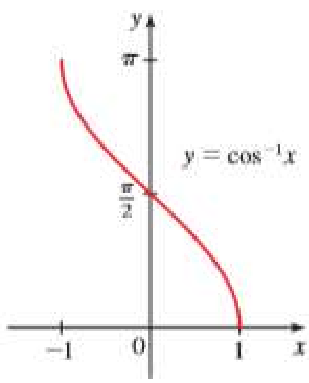


fig. 3

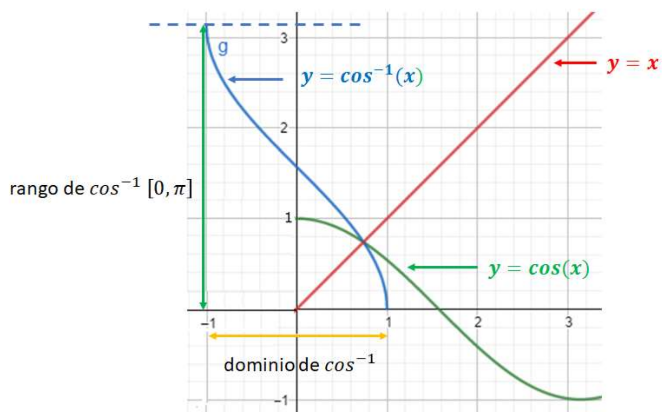


fig. 4

Cálculo de la función inversa.

Aplicaremos el mismo razonamiento detallado para el seno.

Por definición, $y = cos^{-1}(x)$ es el número en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno es x.

¿Cómo encontramos el valor de $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

$cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es un número a, tal que $0 \le a \le \pi$ y $cos(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$cos(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\pi}{6}$$

Por todo lo anterior: $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a \;\Leftrightarrow\; cos(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y esto ocurre si $a = \frac{\pi}{6}$

Luego: $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

La pregunta sería entonces: ¿Cuál es número cuyo coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Ejemplo 19: Evaluación de la función inversa del coseno

Calcule: a) $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $cos^{-1}(0)$ c) $cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

Solución

a) El número en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto, $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

b) El número en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno es 0 es $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$

c) Como ningún múltiplo racional de π tiene por coseno a $\frac{5}{7}$, usamos una calculadora en el modo radianes para determinar su valor aproximado: $cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)\approx 0.77519$ ♦

Al igual que en el seno, de las propiedades de las funciones inversas, podemos deducir las siguientes relaciones.

$\cos\left(cos^{-1}(x)\right)=x$	para	$-1\le x\le 1$
$cos^{-1}\left(cos(x)\right)=x$	para	$0\le x\le \pi$

La Función Inversa de la Tangente

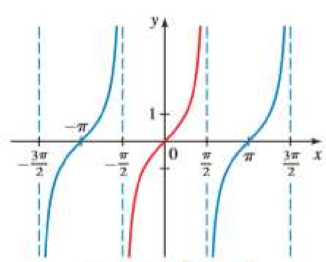
Restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ con objeto de obtener una función biyectiva.

Definición de la función inversa de la tangente
La función inversa de la tangente es la función tan^{-1} con dominio $\mathbb{R}$ e imagen $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ definida por $$tan^{-1}(x)=y \underset{df}{\Leftrightarrow} \tan(y)=x$$ La función inversa de la tangente también recibe el nombre de **arco tangente** y se escribe **arctan**

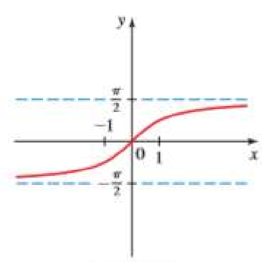
Por lo tanto, $tan^{-1}(x)$ es el número en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades inversas de las funciones.

$\tan\left(tan^{-1}(x)\right)=x$	para	$x\in\mathbb{R}$
$tan^{-1}\left(tan(x)\right)=x$	para	$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Las gráficas de $y=\tan(x)$ y de $y=tan^{-1}(x)$ se muestran a continuación:



$y=\tan x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$



$y=\tan^{-1}x$

Ejemplo 20: Evaluación de la función inversa de la tangente

Determina: a) $tan^{-1}(1)$ b) $tan^{-1}(\sqrt{3})$ c) $tan^{-1}(-20)$

Solución

a) El número en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es 1 es $\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto, $tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

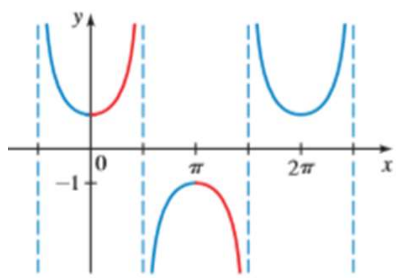
b) El número en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es $\sqrt{3}$ es $\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto, $tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$

c) Usamos una calculadora para determinar que $tan^{-1}(-20)\approx -1.52084$ ♦

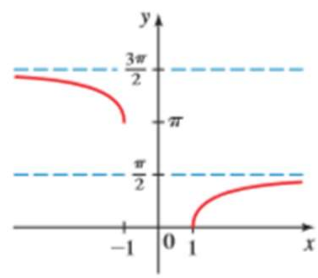
La Función Inversa de la Secante, de la Cosecante y de Cotangente.

Las gráficas de las inversas de las funciones secantes, cosecantes y cotangentes se muestran a continuación.

Función Secante

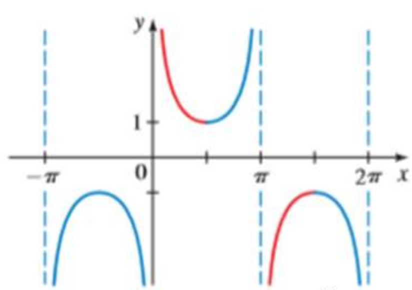


$y=sec(x),\ 0\le x<\frac{\pi}{2},\pi\le x<\frac{3\pi}{2}$

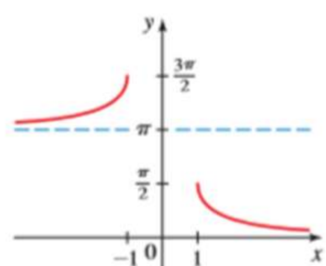


$y=sec^{-1}(x)$

Función Cosecante

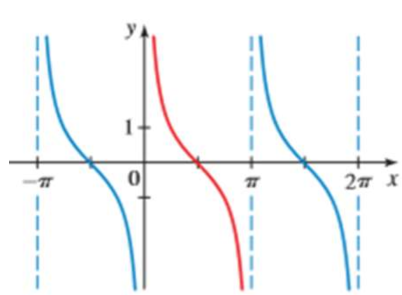


$y=cosec(x),\ 0\le x<\frac{\pi}{2},\pi\le x<\frac{3\pi}{2}$

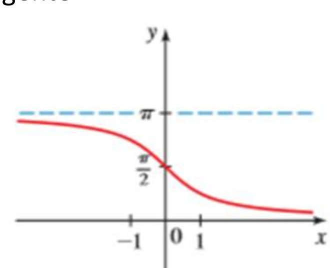


$y=cosec^{-1}(x)$

Función Cotangente



$y=cot(x),\ 0<x<\pi$



$y=cot^{-1}(x)$

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 15

Calcule el valor exacto de cada una de las expresiones, si está definido.

a) $tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ b) $tan^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ c) $sen^{-1}(-2)$

d) $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ e) $sen^{-1}(-\sqrt{3})$ f) $sen^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$

Ejercicio N° 16

Calcule el valor exacto de la expresión, si está definida.

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right)$= b) $\tan(\tan^{-1}5) =$ c) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$= d) $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$

Ejercicio N° 17

Complete la siguiente tabla haciendo uso de las gráficas y las definiciones de las funciones trigonométricas.

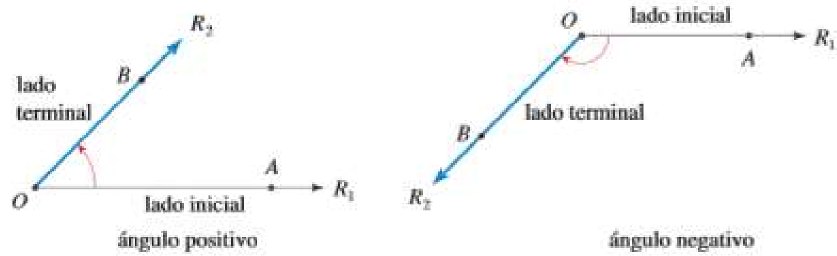
	dominio	imagen	ceros	Ord. Orig.	Asint. Vert.	Asint. Horiz.
$sen(x)$						
$sen^{-1}(x)$						
$\cos(x)$						
$cos^{-1}(x)$						
$\tan(x)$						
$tan^{-1}(x)$						
$\sec(x)$						
$sec^{-1}(x)$						
$cosec(x)$						
$cosec^{-1}(x)$						
$\tan(x)$						
$tan^{-1}(x)$						

Observación importante:

En todas las gráficas, en el $eje\ x$, las únicas unidades de medida que se deben representar son de $\boldsymbol{longitud}$. Jamás deben colocarse grados sexagesimales, ya que estamos trabajando con funciones de Dominio e Imagen reales.

¿Cómo podemos definir un ángulo?

Podemos considerar que un ángulo consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O; uno de los rayos gira sobre el otro como muestra el ejemplo. Según el sentido de giro, el ángulo es positivo (si lo hace en el sentido antihorario) o negativo (en el sentido horario). (ver figura)



¿Qué significa medir un ángulo?

La medida de un ángulo es la cantidad que rota uno de los rayos (R_2) respecto del otro (R_1), que queda fijo, teniendo al vértice O como punto fijo para realizar la rotación.

De manera intuitiva, esto es ¿cuánto se "abre" el ángulo en este giro?

Pregunta: ¿Qué se necesita para medir?

Respuesta: Se necesita un sistema de medición y una unidad de medida adecuada, tomada como patrón.

Los sistemas de medición, y sus unidades, más utilizados son tres:

SISTEMA	UNIDAD
1. Centesimal	Grado Centesimal
2. Sexagesimal	Grado Sexagesimal
3. Circular	Radián

El sistema Centesimal prácticamente no es utilizado.

En el sistema sexagesimal la unidad de medida es el ***grado sexagesimal***.

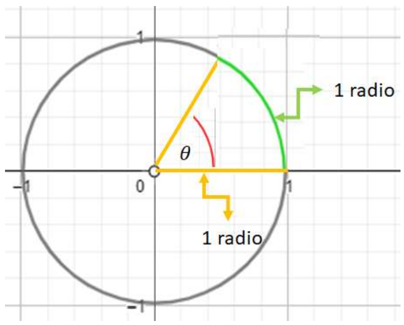
El ángulo cuya medida es 1 grado, es el que se obtiene al hacer rotar el lado terminal la $\frac{1}{360}$ parte de un giro completo. Este ángulo se toma como unidad de medida del sistema sexagesimal.

Cuando se dice "el ángulo α mide 28°, significa que esta unidad cabe 28 veces en el ángulo α ; o que α puede ser subdividido en 28 ángulos de medida 1° cada uno"

En el sistema circular la unidad de medida es el ***radián***.

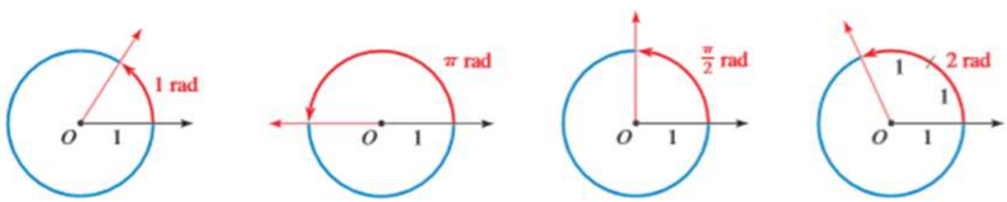
Este sistema es muy utilizado en cálculo y otras ramas de las matemáticas.

El ángulo de un radián es aquél que "barre" un arco de longitud 1 radio. De allí deriva su nombre.



El ángulo θ mide 1 radián. El arco de circunferencia determinado por sus lados tiene la misma medida que el radio de la circunferencia.

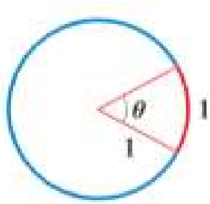
En el siguiente gráfico vemos varios ejemplos de ángulos expresados en radianes.



Unidad de medida

Puesto que un giro completo medido en grados es 360° y medido en radianes es 2π (que es la longitud de la circunferencia unitaria), se obtiene la siguiente relación entre estos dos métodos de medición de ángulo.

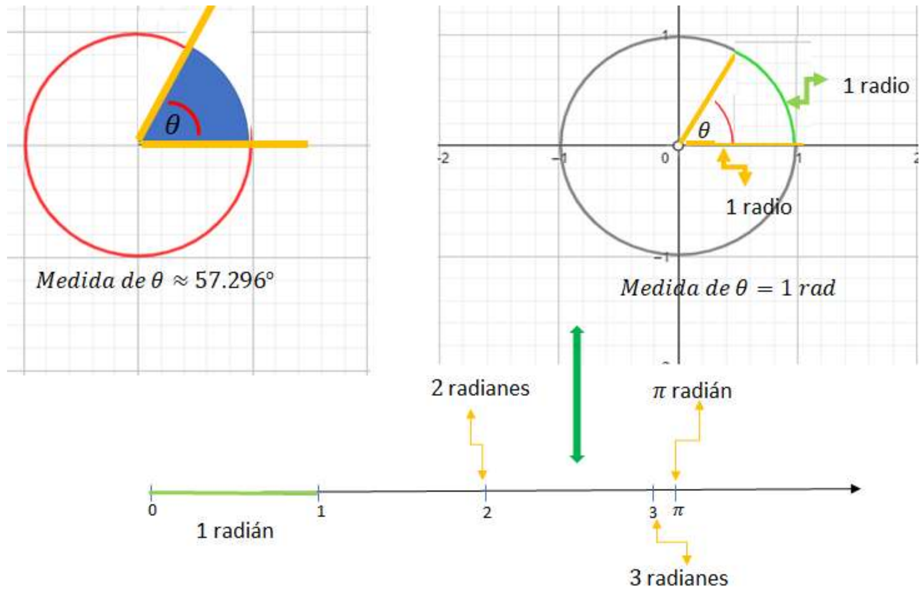
Relación entre grados y radianes
$180^{\circ} = \pi\, rad \qquad 1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\, rad$ 1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.   2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$



$$Medida\ de\ \theta = 1\, rad$$

$$Medida\ de\ \theta \approx 57.296°$$

¿Cuál es la diferencia importante que cabe ser destacada entre estos sistemas de medición?



En el gráfico anterior se muestra claramente el significado de la medida de un ángulo de 1 radián en ambos sistemas.

Queda claro entonces que la medida en radianes es una **longitud**, y como tal, puede ser representada en la recta real; ya, la medida en grados, que corresponde a un área, **NO** puede ser representada en la recta real, pues en ésta sólo se pueden representar longitudes.

Habiendo hecho estas consideraciones y usando la relación entre las unidades, podemos asociar las funciones trigonométricas de números reales, a funciones trigonométricas de ángulos.

La mayor aplicación de las funciones trigonométricas de ángulos es la resolución de problemas relacionados a la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 18

Complete la siguiente tabla:

Medida sexagesimal	0°	30°			90°		135°	150°		240°	270°		360°
Medida radial	0		$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	

Ejercicio Integrador

Dada la función $y = 1 + sen(\frac{1}{2}x)$

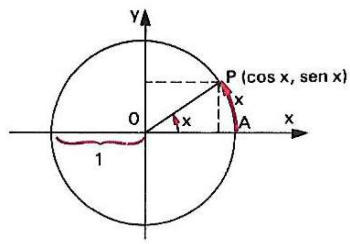
a) Determinar analíticamente: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, asíntotas verticales, asíntotas horizontales, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

b) Determinar el intervalo adecuado y representar gráficamente un periodo completo de la función.
c) Hacer una restricción de dominio adecuada y encontrar la función inversa.
d) Determinar analíticamente de la función inversa: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, asíntotas verticales, asíntotas horizontales, conjunto de positividad y conjunto de negatividad de la función inversa.
e) Representar ambas funciones en el mismo gráfico.

8. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

Relaciones entre las funciones trigonométricas

Ahora que conocemos las varias funciones trigonométricas, veremos algunas importantes relaciones que las vinculan.



La distancia de $P(\cos(x)\,,sen(x))$ al origen del sistema $(0\,,0)$ es 1. Entonces:

$$\sqrt{(\cos x-0)^2+(sen\ x-0)^2}=1 \Rightarrow \sqrt{cos^2x+sen^2x}=1 \quad \text{elevando al cuadrado}$$

$$cos^2x+sen^2x=1 \quad \text{relación fundamental}$$

A partir de esta relación podemos obtener las siguientes relaciones conocidas como ecuaciones pitagóricas.

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por cos^2x queda:

$$\frac{cos^2x}{cos^2x}+\frac{sen^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$$

$$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}=sec^2x$$

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por sen^2x queda:

$$\frac{cos^2x}{sen^2x}+\frac{sen^2x}{sen^2x}=\frac{1}{sen^2x}$$

$$cotan^2x+1=\frac{1}{sen^2x}=cosec^2x$$

Resumiendo, tenemos que para cualquier valor real de x, para el cual las funciones existen, son verdaderas las siguientes ecuaciones.

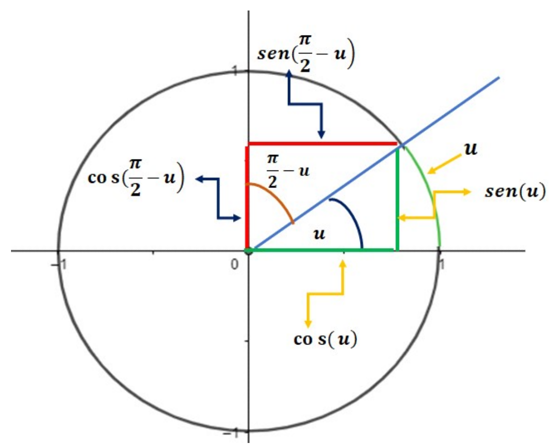
Identidades Pitagóricas		
$cos^2x+sen^2x=1$	$1+tan^2x=sec^2x$	$cotan^2x+1=cosec^2x$

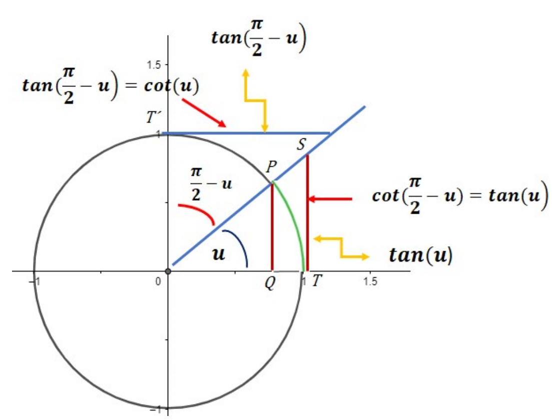
Ecuaciones de este tipo, que producen sentencias numéricas verdaderas para cualquier valor de x - siempre que x pertenezca al dominio de las funciones involucradas - son llamadas **IDENTIDADES**.

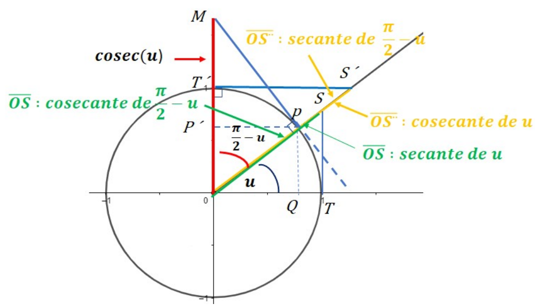
Veamos otras identidades importantes:

Identidades Recíprocas		
$cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$
$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$	

Identidades pares-impares		
$sen(-x) = -sen(x)$	$cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

Identidades de cofunciones	
$sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$	
$cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \text{sen}(u)$	

Identidades de cofunciones	
$tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot(u)$	
$cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan(u)$	

Identidades de cofunciones		
	$\overline{OS} = \sec(u)$ $\overline{OS´} = \sec\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = cosec(u)$	$sec\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \mathrm{cosec}(u)$
		$cosec\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = sec(u)$

Estas identidades permiten **simplificar** expresiones trigonométricas.

Para simplificar las **expresiones algebraicas**, usamos

la factorización,

denominadores comunes y

las fórmulas de productos especiales.

Para simplificar **expresiones trigonométricas** usamos

estas mismas técnicas y

las identidades trigonométricas fundamentales

Veamos algunos ejemplos y aplicaciones:

Simplificación de expresiones trigonométricas

Ejemplo 21: Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos(t) + \tan(t)\, sen(t)$

Solución

Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \tan t \,\mathrm{sen}\, t = \cos t + \left(\frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t}\right)\mathrm{sen}\, t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t}{\cos t} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \sec t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

♦

Ejemplo 22: Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{1+sen\theta}$

Solución

Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \quad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \quad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \quad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

♦

Demostración de Identidades Trigonométricas.

Ahora estamos en condiciones de trabajar con ecuaciones que contengan expresiones trigonométricas y verificar si dichas ecuaciones son identidades o no lo son.

Resulta útil tener un criterio o procedimiento sugerido para tal fin.

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación no es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable (o variables). Por consiguiente, la ecuación:

$$sen(x) + \cos(x) = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \frac{\pi}{4}$, tenemos:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.
2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Veremos algunos ejemplos importantes, pero que no agotan los recursos del procedimiento.

Ejemplo 23: Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta(sec\theta - cos\theta) = sen^2\theta$

Solución

El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PM} &= \cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) & \\
&= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) & \text{Identidad recíproca} \\
&= 1 - \cos^2\theta & \text{Desarrollo} \\
&= \mathrm{sen}^2\theta = \mathrm{SM} & \text{Identidad pitagórica}
\end{aligned}
$$

♦

Ejemplo 24: Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad $2\tan(x)\sec(x) = \frac{1}{1-sen(x)} - \frac{1}{1+sen(x)}$

Solución

Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SM} &= \frac{1}{1-\mathrm{sen}\,x} - \frac{1}{1+\mathrm{sen}\,x} & \\
&= \frac{(1+\mathrm{sen}\,x)-(1-\mathrm{sen}\,x)}{(1-\mathrm{sen}\,x)(1+\mathrm{sen}\,x)} & \text{Común denominador} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}^2 x} & \text{Simplificación} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x} & \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\,\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{Factorización} \\
&= 2\tan x\sec x = \mathrm{PM} & \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}
$$

♦

Ejemplo 25: Demostración de una identidad mediante la introducción de un elemento extra

Verifique la identidad $\frac{\cos(u)}{1-sen(u)} = \sec(u) + \tan(u)$

Solución

Empezamos con el primer miembro y multiplicamos numerador y denominador por $1 + sen(u)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PM} &= \frac{\cos u}{1-\operatorname{sen} u} \\
&= \frac{\cos u}{1-\operatorname{sen} u}\cdot\frac{1+\operatorname{sen} u}{1+\operatorname{sen} u} && \text{Multiplicación del numerador y del denominador por } 1+\operatorname{sen} u \\
&= \frac{\cos u\,(1+\operatorname{sen} u)}{1-\operatorname{sen}^2 u} && \text{Desarrollo del denominador} \\
&= \frac{\cos u\,(1+\operatorname{sen} u)}{\cos^2 u} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \frac{1+\operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Cancelación del factor común} \\
&= \frac{1}{\cos u}+\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Separación en dos fracciones} \\
&= \sec u + \tan u && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}
$$

♦

Ejemplo 26: Demostración de una identidad trabajando ambos miembros por separado

Verifique la identidad $\frac{1+\cos(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{tan^2(\theta)}{sec(\theta)-1}$

Solución

Comprobamos esta identidad transformando por separado cada miembro en la misma expresión. Debemos explicitar en cada paso la identidad usada, el algoritmo matemático, la operación matemática o la razón de cada paso. O sea, Justificar.

$$\mathrm{PM} = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\mathrm{SM} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se infiere que $PM = SM$, de modo que la ecuación es una identidad. ♦

Por último, haremos una descripción de la técnica de la sustitución trigonométrica, la cual aplicamos para convertir expresiones algebraicas en trigonométricas. Con frecuencia es útil en el cálculo infinitesimal, por ejemplo, para determinar el área de un círculo o de una elipse.

Ejemplo 27: Sustitución trigonométrica

Sustituya x por $sen\ (\theta)$ en la expresión $\sqrt{1-x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Solución

Hacemos $x = sen\ (\theta)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta} && \text{Sustitución de } x = \mathrm{sen}\,\theta \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \cos\theta && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

♦

La última igualdad es verdadera porque $\cos(\theta) \geq 0$ para los valores de θ en cuestión.

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 19

Efectúe la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica que se proporciona y simplifique. Suponga que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = sen(\theta)$
b) $\sqrt{x^2-1}$, $x = \sec(\theta)$
c) $\sqrt{9-x^2}$, $x = 3sen(\theta)$
d) $\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}$, $x = 2\tan(\theta)$

Veremos otras identidades útiles (sin demostración) que usaremos con mucha frecuencia.

Fórmulas de adición y sustracción.

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + \cos(\alpha)\,sen(\beta) \qquad \textbf{(1)}$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - \cos(\alpha)\,sen(\beta)$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,sen(\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\,sen(\beta)$$

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Ejemplo 27: Calcular el valor exacto de una expresión

a) $\cos(75°)$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solución

a) $75° = 45° + 30°$

$cos(45° + 30°) = \cos(45°)\,.\cos(30°) - sen(45°).\,sen(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ♦

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right).sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ♦

De estás identidades se desprenden otras identidades muy importantes y de uso frecuente en el cálculo infinitesimal.

De (1), si $\alpha = \beta$ tenemos

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha + \alpha) = sen(2\alpha) = sen(\alpha)cos(\alpha) + \cos(\alpha)\,sen(\alpha) =$$
$$= sen(\alpha)cos(\alpha) + sen(\alpha)cos(\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)}}$$

De (2), si $\alpha = \beta$ tenemos

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha + \alpha) = cos(2\alpha) = cos(\alpha)cos(\alpha) - \mathrm{sen}(\alpha)\,sen(\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

$$\boxed{\boldsymbol{cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)}}$$

$$cos(2\alpha) = \left(1 - sen^2(x)\right) - sen^2(\alpha) = 1 - 2sen^2(x)$$

$$\boxed{\boldsymbol{cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(x)}}$$

Ejemplo 28: Uso de las fórmulas del ángulo doble

Si $\cos(x) = -\frac{2}{3}$ y x está en el cuadrante II, calcule $\cos(2x)$ y $sen(2x)$

Solución

Si usamos una de las fórmulas para el ángulo doble en el caso del coseno obtenemos

$\cos(2x) = 2\,cos^2(x) - 1$

$= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

Para aplicar la fórmula $sen(2x) = 2\,sen(x)\cos(x)$ necesitamos determinar primero $sen\,(x)$. Tenemos entonces

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

donde hemos usado la raíz cuadrada positiva porque sen x es positivo en el cuadrante II. Por consiguiente,

$sen(2x) = 2\, sen(x)\cos(x)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ ♦

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 20

Determinar $sen\ (2x), cos\ (2x)$ y $tan\ (2x)$ a partir de la información proporcionada.

a) $sen(x) = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

b) $\cos(x) = \frac{4}{5}$, $cosec(x) < 0$

c) $\tan(x) = -\frac{1}{3}$, $\cos(x) > 0$

Ejemplo 29: Una fórmula para el ángulo triple

Escriba $\cos(3x)$ en términos de $cos\ (x)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) && \\
&= \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x && \text{Fórmula de adición} \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2 \operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x && \text{Fórmulas del ángulo doble} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x && \text{Desarrollo} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x && \text{Desarrollo} \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x && \text{Simplificación}
\end{aligned}$$

Veremos ahora una identidad de gran utilidad en el cálculo integral cuando se desea reducir el grado de un seno o un coseno de grado dos.

Fórmulas para reducir las potencias

$sen^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$	$tan^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$

Ejemplo 30: Reducción de potencias en una expresión trigonométrica

Exprese $sen^2(x)cos^2(x)$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1-\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x) \end{aligned}$$

♦

Otras fórmulas de uso menos frecuente pero bastante útiles son:

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$sen\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(u)}{2}}$	$cos\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(u)}{2}}$
$tan\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\frac{1-\cos(u)}{sen(u)} = \frac{sen(u)}{1+\cos(u)}$	

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 21

Utilice una fórmula apropiada de mitad de ángulo o semiángulo para determinar el valor exacto de la expresión.

a) $sen(15°)$ b) $\tan(22.5°)$ c) $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ d) $sen\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

Ejercicio N° 22

Aplique las fórmulas para reducir la potencia y poder volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno,

a) $sen^4(x)$ b) $cos^2(x)sen^4(x)$ c) $cos^6(x)$

Presentamos otras identidades que tampoco demostraremos y que usamos con menor frecuencia.

Fórmulas del producto-a-suma

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$
$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$$
$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$
$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

Fórmulas suma-a-producto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 23

Verifique las siguientes identidades trigonométricas

a. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$

b. $\frac{\sec x \ \cot x}{\csc x} = 1$

c. $\frac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

d. $\csc x \, [\csc x - \operatorname{sen} x] = \cot^2 x$

e. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \ \operatorname{sen}^2 x$

f. $\cot(-x) \cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\csc x$

g. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

h. $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

i. $\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

j. $\cot 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

9. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA**.

Ejemplos:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$
$$2sen(x) - 1 = 0$$
$$tan^2(x) - 3 = 0$$

La primera ecuación, como ya vimos, es una identidad, o sea, es una sentencia verdadera para todo valor de la variable x.

Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x.

Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.

Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

¿Qué tipo de ecuaciones trigonométricas veremos en este curso?

1. Resolución de ecuaciones trigonométricas del tipo:

   $2sen(x) - 1 = 0$

   $tan^2(x) - 3 = 0$
2. Una ecuación del tipo cuadrático

   $2cos^2(x) - 7cos(x) + 3 = 0.2$
3. Uso de una identidad trigonométrica

   $1 + sen(x) = 2cos^2(x)$

   $sen(2x) - cos(x) = 0$
4. Elevación al cuadrado y uso de una identidad

   $cos(x) + 1 = sen(x) \quad en\ el\ intervalo\ (0, 2\pi)$
5. Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

   $\sqrt{3}tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Aplicamos las reglas del álgebra y aislamos la función trigonométrica en un lado del signo igual.

Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 31: Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2sen(x) - 1 = 0$

Solución

Empezamos por aislar $sen\ (x)$.

$$2\,sen(x) - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\,sen(x) = 1 \qquad \text{Sunando 1 en ambos miembros}$$

$$sen(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{Dividiendo por 2 ambos miembros de la igualdad}$$

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

En la figura 1. se ilustra una representación gráfica de las soluciones usando las funciones trigonométricas.

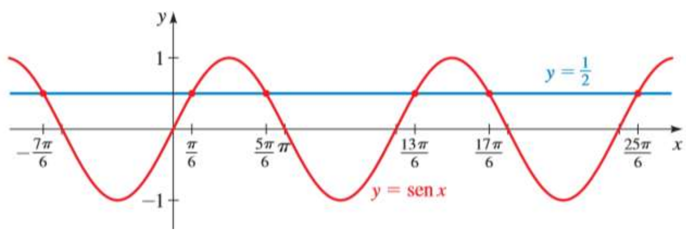


Fig 1.

En la fig 2. se ilustra una representación gráfica de las soluciones usando la circunferencia trigonométrica. Esta representación suele ser muy útil.

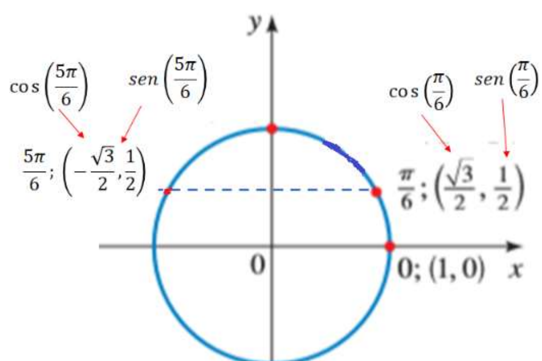


Fig 2

♦

Ejemplo 32: Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $tan^2(x) - 3 = 0$

Solución

Empezamos por aislar a $tan\,(x)$:

$$\tan^2 x - 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$\tan^2 x = 3 \qquad \text{Suma de 3}$$
$$\tan x = \pm\sqrt{3} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2\,,\pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otras soluciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ♦

Ejemplo 33: Una ecuación de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2cos^2(x) - 7cos(x) + 3 = 0.2$

Solución

Factorizamos el primer miembro de la ecuación:

Ecuación de tipo cuadrático
$2C^2 - 7C + 3 = 0$
$(2C - 1)(C - 3) = 0$

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0 \qquad \text{Factorización}$$
$$2\cos x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos x - 3 = 0 \qquad \text{Cada factor se iguala a 0}$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos x = 3 \qquad \text{Determinación de cos x}$$

Puesto que el coseno tiene periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el caso de la primera ecuación, son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. La segunda ecuación no tiene soluciones porque $cos\ (x)$ nunca es mayor que 1. Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. ♦

Ejemplo 34: Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + sen(x) = 2cos^2(x)$

Solución

Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

Ecuación de tipo cuadrático
$2S^2 + S - 1 = 0$
$(2S - 1)(S + 1) = 0$

$$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$
$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación}$$
$$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$
$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0 \qquad \text{Todos los factores se igualan a 0}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1 \qquad \text{Determinación de sen } x$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Como el periodo del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ♦

Ejemplo 35: Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $sen(2x) - cos(x) = 0$

Solución

El primer término es una función de $2x$ y el segundo es una función de x, de modo que empezamos por usar una identidad trigonométrica para volver a escribir el primer término sólo en función de x.

$$\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \qquad \text{Fórmula del ángulo doble}$$

$$\cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Cada factor se iguala a 0}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{Determinación de sen } x$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)$$

El periodo tanto del seno como del coseno es 2π, de modo que obtenemos todas las soluciones de la ecuación mediante la adición de un múltiplo entero cualquiera de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ♦

Ejemplo 36: Elevación al cuadrado y uso de una identidad

Resuelva la ecuación $cos(x) + 1 = sen(x)$ $\; en\ el\ intervalo\ (0, 2\pi)$

Solución

Para obtener una ecuación que contenga sólo seno o sólo coseno, elevamos ambos miembros y aplicamos la identidad pitagórica.

$$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos miembros}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \quad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \quad \text{Simplificación}$$

$$2\cos x\,(\cos x + 1) = 0 \quad \text{Factorización}$$

$$2\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x + 1 = 0 \quad \text{Se iguala cada factor a 0}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x = -1 \quad \text{Determinación de } \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \pi \quad \text{Determinación de x en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Puesto que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamos comprobar si hay soluciones extrañas. De acuerdo con comprobación observamos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

Atención: Siempre que se eleva al cuadrado pueden aparecer soluciones "extrañas". Por eso es necesario comprobar que cumplen con la ecuación original.

$x = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\frac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$0 + 1 = 1 \quad ✓$$

$x = \frac{3\pi}{2}$:

$$\cos\frac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1 \quad ✗$$

$x = \pi$:

$$\cos\pi + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\pi$$

$$-1 + 1 = 0 \quad ✓$$

♦

Veremos qué ocurre cuando se trabaja con funciones que tienen como argumento ángulos múltiples.

La metodología se resume a:

1- Primero determinar el múltiplo del ángulo
2- Después dividir para hallar el ángulo.

Ejemplo 37: Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

Considere la ecuación $2sen(3x) - 1 = 0$

a) Calcule todas las soluciones de la ecuación.

b) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$

Solución

a) Empezamos por aislar a $sen\ (3x)$, y luego determinamos el ángulo múltiple $3x$.

$$2\ sen(3x) - 1 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$2\ sen(3x) = 1 \quad \text{Suma de 1}$$

$$sen(3x) = \frac{1}{2} \quad \text{División entre 2}$$

$$3x = \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6} \quad \text{Determinación de ex en el intervalo } [0;2\pi)$$

Para obtener todas las soluciones, adicionamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por consiguiente, las soluciones son de la forma:

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Para determinar x, dividimos entre 3 para conocer las soluciones:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso a) que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ corresponden a $k = 0$, 1 y 2. Para todos los otros valores de k, los valores correspondientes de x quedan fuera de este intervalo.

Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son:

$$S = \left\{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}\right\}$$

Se deja la verificación a cargo del alumno.

♦

¿Qué ocurre si las soluciones de las ecuaciones no están encuadradas en los valores que hemos calculado en nuestra tablita o que conocemos por algún motivo?

En ese caso recurrimos a las inversas de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 38: Aplicación de las funciones trigonométricas inversas

Resuelva la ecuación $tan^2(x) - \tan(x) - 2 = 0$

Solución

Empezamos por factorizar el primer miembro:

Ecuación de tipo cuadrático

$T^2 - T - 2 = 0$

$(T - 2)(T + 1) = 0$

	$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$		Ecuación dada
	$(\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0$		Factorización
$\tan x - 2 = 0$	o bien	$\tan x + 1 = 0$	Se iguala cada factor a 0
$\tan x = 2$	o bien	$\tan x = -1$	Determinación de tan x
$x = \tan^{-1} 2$	o bien	$x = -\frac{\pi}{4}$	Determinación de x en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Como el periodo de la tangente es π, obtenemos todas las soluciones sumando múltiplos enteros de π a estas soluciones. Por lo tanto, todas las soluciones son

$$x = tan^{-1}2 + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ♦

Ejemplo 39: Determinación de los puntos de intersección

Calcule los valores de x en los cuales se cortan las gráficas de $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

Solución

Para hallar la solución exacta, hacemos $f(x) = g(x)$ y resolvemos algebraicamente la ecuación resultante.

$$sen(x) = \cos(x)$$

Puesto que los números de x para los cuales $cos(x) = 0$ no son soluciones de la ecuación, podemos dividir ambos miembros entre $\cos(x)$.

$$\frac{sen(x)}{\cos(x)} = 1$$

$$\tan(x) = 1$$

Puesto que la tangente tiene periodo π, primero encontramos las soluciones en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ La única solución en este intervalo es $x = \pi/4$. Para obtener todas las soluciones sumamos cualquier entero múltiplo de π a esta solución. Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. Las gráficas se cortan para estos valores de x. Utilice su calculadora para comprobar que estos son los mismos valores, con tres cifras decimales, que se obtienen si realizamos las gráficas con una graficadora. ♦

IMPORTANTE!! En todas las ecuaciones trigonométricas hay que verificar las posibles soluciones.

Se deja para el lector la verificación de aquellas ecuaciones con soluciones particulares que se citaron en los ejemplos.

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 24

Encuentre todos los valores de x para los cuales se verifica:

$$sen\, x + 2 = -sen^2 x + \frac{5}{2}\, sen\, x + \frac{3}{2}$$

Ejercicio N° 25

Resuelve cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0,2\pi)$ y verifique las soluciones.

a. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

b. $\text{sen}\, 2x - \cos x = 0$

c. $(\tan x + \sqrt{3})(\cos x + 2) = 0$

d. $\cos x \operatorname{sen} x - 2\cos x = 0$

e. $\operatorname{sen}^2 x = 4 - \cos^2 x$

Ejercicio N° 26

Halle los puntos de intersección entre las siguientes funciones en el intervalo $[0,2\pi)$.

e. $f(x) = \cos x \; ; \; g(x) = senx$

f. $f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} \; ; \; g(x) = -sen\left(\frac{x}{2}\right)$